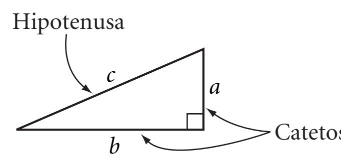
LECCIÓN
CONDENSADA

9.1 El Teorema de Pitágoras

En esta lección

- Conocerás el **Teorema de Pitágoras,** que establece la relación entre las longitudes de los catetos y la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo
- Resolverás un **rompecabezas de disección** que te ayudará a comprender por qué funciona el Teorema de Pitágoras
- Leerás una **prueba de párrafo** del Teorema de Pitágoras
- Usarás el Teorema de Pitágoras para **resolver problemas**

En un triángulo rectángulo, el lado opuesto al ángulo recto se llama la **hipotenusa** y los otros lados se llaman **catetos** (*legs*). Si a y b son las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo, y c es la longitud de la hipotenusa, entonces el Teorema de Pitágoras establece que $a^2 + b^2 = c^2$. Es decir, la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa.



La actividad de la investigación ayudará a convencerte de que el Teorema de Pitágoras es cierto.

Investigación: Los tres lados de un triángulo rectángulo

Sigue atentamente los Pasos 1–3 en tu libro. Trata de ser lo más exacto posible cuando construyas los ángulos y los segmentos de recta.

Recorta el cuadrado que se sitúa sobre el cateto más corto y las cuatro partes del cuadrado que se sitúan sobre el cateto más largo. Acomoda las cinco partes para que cubran exactamente el cuadrado que se sitúa sobre la hipotenusa. (Sugerencia: El cuadrado pequeño va a la mitad.)

Ahora piensa en la forma en que este rompecabezas demuestra el Teorema de Pitágoras:

- Escribe expresiones para las áreas de los cuadrados que se sitúan sobre los catetos.
- Escribe una expresión para el área del cuadrado que se sitúa sobre la hipotenusa.
- Pudiste cubrir exactamente el cuadrado de la hipotenusa con los cuadrados de los catetos. Explica en palabras lo que esto dice respecto a las áreas de los tres cuadrados.
- Ahora escribe una ecuación algebraica que exprese la relación existente entre las áreas. Resume tu trabajo en la forma del Teorema de Pitágoras.

C-82

El Teorema de Pitágoras En un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa. Si a y b son las longitudes de los catetos, y c es la longitud de la hipotenusa, entonces $a^2 + b^2 = c^2$.

(continúa)

Lección 9.1 • El Teorema de Pitágoras (continuación)

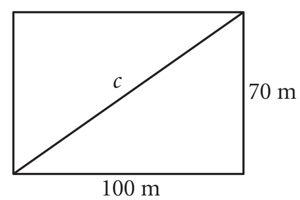
Un **teorema** es una conjetura que se ha probado. Hay más de 200 pruebas conocidas del Teorema de Pitágoras. Tu libro proporciona una prueba. Lee esa prueba atentamente y asegúrate de que puedes explicar cada paso.

En la página 464 de tu libro se dan algunos ejemplos que ilustran que la relación pitagórica, $a^2 + b^2 = c^2$, no se mantiene en triángulos acutángulos ni obtusángulos.

Puedes usar el Teorema de Pitágoras para resolver problemas relacionados con triángulos rectángulos. En tu libro se dan dos ejemplos; síguelos y después lee los ejemplos siguientes.

EJEMPLO A Una cancha de fútbol olímpica es un rectángulo de 100 metros de largo y 70 metros de ancho. ¿Qué longitud tiene la diagonal de la cancha?

▶ Solución La diagonal es la hipotenusa de un triángulo rectángulo, con catetos de longitudes 70 m y 100 m. Puedes usar el Teorema de Pitágoras para encontrar su longitud.

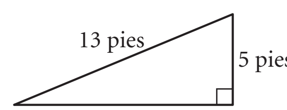


$a^2 + b^2 = c^2$	La fórmula de Pitágoras.
$70^2 + 100^2 = c^2$	Sustituye los valores conocidos.
$4{,}900 + 10{,}000 = c^2$	Eleva los términos al cuadrado.
$14{,}900 = c^2$	Suma.
$122 \approx c$	Resuelve.

La diagonal tiene una longitud aproximada de 122 metros.

EJEMPLO B ¿Cuál es el área de un triángulo rectángulo con un cateto de 5 pies de longitud y una hipotenusa de 13 pies de longitud?

▶ Solución Puedes considerar los dos catetos como la base y la altura del triángulo. La longitud de un cateto es 5 pies. Para encontrar la longitud del otro cateto, usa el Teorema de Pitágoras.



$a^2 + b^2 = c^2$	La fórmula de Pitágoras.
$5^2 + b^2 = 13^2$	Sustituye.
$25 + b^2 = 169$	Eleva los términos al cuadrado.
$b^2 = 144$	Resta 25 de ambos lados.
$b = 12$	Resuelve.

El otro cateto tiene una longitud de 12; entonces, el área es $\frac{1}{2}(5)(12)$, ó 30 pies cuadrados.

LECCIÓN CONDENSADA

9.2

El inverso del Teorema de Pitágoras

En esta lección

- Experimentarás con los **triples pitagóricos** para determinar si el inverso del Teorema de Pitágoras parece ser cierto
- Probarás **el inverso del Teorema de Pitágoras**
- Determinarás si un triángulo es un triángulo rectángulo, basándote en las longitudes de sus lados

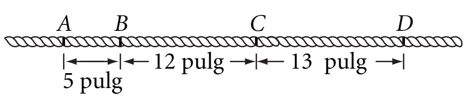
En la Lección 9.1, aprendiste el Teorema de Pitágoras, que establece que si un triángulo es rectángulo, entonces el cuadrado de la longitud de su hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los dos catetos. ¿Crees que el inverso es cierto? En otras palabras, si las longitudes de los lados de un triángulo funcionan según la fórmula de Pitágoras, ¿el triángulo debe ser un triángulo rectángulo? Explorarás esta cuestión en la investigación.

Investigación: ¿Es cierto el inverso?

Para esta investigación, necesitarás un cordón, tres clips para papel, y dos ayudantes. Si nadie te puede ayudar, necesitarás un cordón, algunos alfileres o tachuelas, y una hoja grande de cartulina gruesa.

Un conjunto de tres enteros positivos que satisfacen la fórmula de Pitágoras se conoce como un **triple pitagórico.** Por ejemplo, como $3^2 + 4^2 = 5^2$, los enteros 3, 4, y 5 son un triple pitagórico.

En la página 468 de tu libro, se enumeran nueve ejemplos de triples pitagóricos. Selecciona un triple de la lista, y delimita cuatro puntos, *A, B, C,* y *D,* en un cordón para crear tres longitudes consecutivas a partir de tu conjunto de triples. (Deja algo del cordón a la izquierda de *A* y a la derecha de *D,* de manera que puedas hacer un nudo.) Por ejemplo, si escoges 5, 12, 13, podrías marcar tu cordón así:



Amarra los extremos del cordón de manera que los puntos *A* y *D* se junten.

Si estás trabajando con otras dos personas:

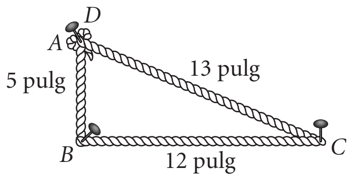
- Asegura tres clips sobre el cordón.
- Cada persona jala un clip cada uno, en el punto *A, B,* o *C,* para estirar el cordón y formar un triángulo. (Consulta la fotografía en tu libro.)
- Mide el ángulo más grande del triángulo. ¿Qué tipo de triángulo se forma?

Si estás trabajando solo:

- Fija el cordón a la cartulina en uno de los puntos señalados.
- Estira la parte del cordón entre el punto fijo y el siguiente punto señalado. Sujeta ese punto. Después jala el tercer punto señalado para estirar el cordón y formar un triángulo. Sujeta ese punto.

(continúa)

- Mide el ángulo más grande del triángulo. ¿Qué tipo de triángulo se forma?



Selecciona al menos otro triple de la lista y repite el experimento.

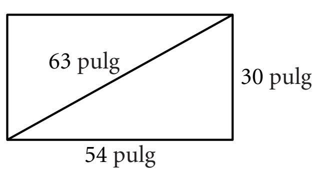
Tus resultados pueden resumirse en una conjetura.

> **El inverso del Teorema de Pitágoras** Si las longitudes de los tres lados de un triángulo satisfacen la ecuación de Pitágoras, entonces el triángulo es un triángulo rectángulo. **C-83**

En la página 470 de tu libro, se comienza una prueba del Inverso del Teorema de Pitágoras. En los ejercicios, completarás esta prueba.

EJEMPLO Un niño que se llama les quería construir un corral rectangular para su conejillo de Indias. Cuando terminó, midió el fondo del corral. Encontró que un lado tenía 54 pulgadas de largo, el lado adyacente tenía 30 pulgadas de largo y una diagonal medía 63 pulgadas de largo. ¿El corral es realmente rectangular?

▶ ***Solución*** Si el corral es rectangular, entonces dos lados adyacentes y una diagonal formarán un triángulo rectángulo. Para ver si éste es el caso, verifica si las medidas forman un triple pitagórico.



$30^2 + 54^2 = 900 + 2916 = 3816$ y $63^2 = 3969$

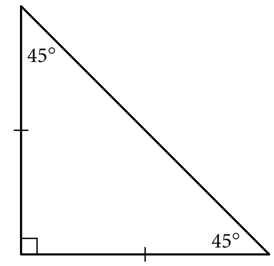
Como $30^2 + 54^2 \neq 63^2$, las medidas no son un triple pitagórico, así que el triángulo no es un triángulo rectángulo. Por lo tanto, el corral no es rectangular.

LECCIÓN CONDENSADA 9.3

Dos triángulos rectángulos especiales

En esta lección

- Descubrirás un medio rápido para hallar la longitud desconocida de un lado en un **triángulo rectángulo isósceles** (también llamado **triángulo 45°-45°-90°**)
- Descubrirás un medio rápido para encontrar la longitud desconocida de un lado en un **triángulo 30°-60°-90°**

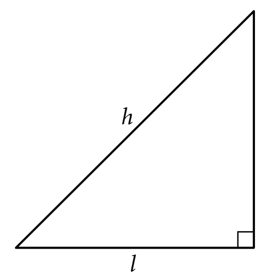


Un triángulo rectángulo isósceles a veces se conoce como triángulo 45°-45°-90°, debido a las medidas de sus ángulos. Observa que un triángulo rectángulo isósceles es la mitad de un cuadrado.

En la siguiente investigación, descubrirás la relación existente entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo isósceles.

Investigación 1: Triángulos rectángulos isósceles

El triángulo rectángulo isósceles ilustrado aquí tiene unos catetos de longitud l y una hipotenusa de longitud h.



Si conoces el valor de l, puedes usar el Teorema de Pitágoras para encontrar h. He aquí dos ejemplos.

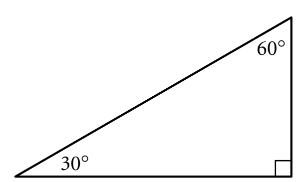
- Si l es 5, entonces $h^2 = 5^2 + 5^2 = 50$, de manera que $h = \sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$.
- Si l es 8, entonces $h^2 = 8^2 + 8^2 = 128$, de manera que $h = \sqrt{128} = \sqrt{64 \cdot 2} = 8\sqrt{2}$.

Halla el valor de h para al menos otros tres valores enteros de l. Simplifica la raíz cuadrada, pero déjala en forma de radical.

Busca un patrón en la relación entre l y h. Resume tus descubrimientos completando esta conjetura.

Conjetura del triángulo rectángulo isósceles En un triángulo rectángulo isósceles, si los catetos tienen longitud l, entonces la hipotenusa tiene longitud ___________________. **C-84**

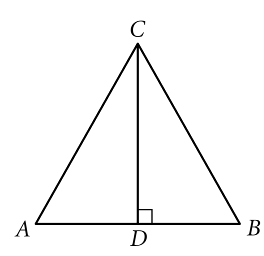
Si doblas un triángulo equilátero a lo largo de una de sus rectas de simetría, obtienes un triángulo 30°-60°-90°.



En la siguiente investigación, verás si hay un medio rápido para encontrar las longitudes laterales de un triángulo 30°-60°-90°.

Investigación 2: Triángulos 30°-60°-90°

El triángulo ABC es equilátero y $\overline{CD}$ es una altitud.

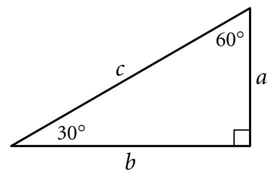


Responde las preguntas de los Pasos 1–3 de la investigación. Necesitas usar el hecho de que una altitud de un triángulo equilátero también es una mediana y una bisectriz de ángulo. En el Paso 3 debes concluir que la longitud del cateto más corto es la mitad de la longitud de la hipotenusa.

(continúa)

A continuación hay un triángulo 30°-60°-90°. Si conoces la longitud del cateto más corto, *a*, puedes encontrar la longitud de los otros lados. Por ejemplo, si *a* es 3, entonces la hipotenusa, *c*, es 6. Usa la fórmula de Pitágoras para encontrar la longitud del otro cateto, *b*.

$$3^2 + b^2 = 6^2$$
$$9 + b^2 = 36$$
$$b^2 = 27$$
$$b = \sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = 3\sqrt{3}$$



La longitud del cateto *b* es $3\sqrt{3}$ unidades.

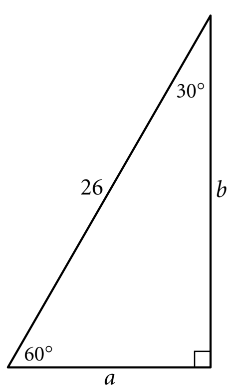
Comienza con al menos tres valores distintos de *a* y encuentra las longitudes de los otros lados. Simplifica las raíces cuadradas, pero déjalas en forma de radical. Resume tus resultados completando esta conjetura.

Conjetura del triángulo 30°-60°-90° En un triángulo 30°-60°-90°, si el cateto más corto tiene una longitud *a*, entonces el cateto más largo tiene una longitud ___________________, y la hipotenusa tiene una longitud 2*a*. **C-85**

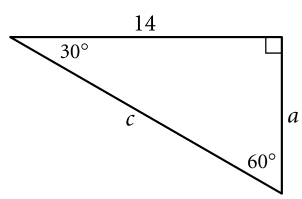
En la página 477 de tu libro, hay una prueba de la Conjetura del triángulo 30°-60°-90°. Lee la prueba y asegúrate de comprenderla.

EJEMPLO Halla las longitudes de los lados señalados con letras. Todas las longitudes están en centímetros.

a.



b.



▶ ***Solución***

a. La longitud del cateto más corto es la mitad de la longitud de la hipotenusa, de manera que $a = 13$ cm. La longitud del cateto más largo es la longitud del cateto más corto multiplicada por $\sqrt{3}$, así que $b = 13\sqrt{3}$ cm.

b. La longitud del cateto más largo es la longitud del cateto más corto multiplicada por $\sqrt{3}$, de manera que $14 = a\sqrt{3}$ y $a = \frac{14}{\sqrt{3}}$ cm. La longitud de la hipotenusa es dos veces la longitud del cateto más corto, así que $c = \frac{28}{\sqrt{3}}$ cm.

LECCIÓN CONDENSADA

9.4 Problemas prácticos

En esta lección

- Usarás el Teorema de Pitágoras para **resolver problemas**

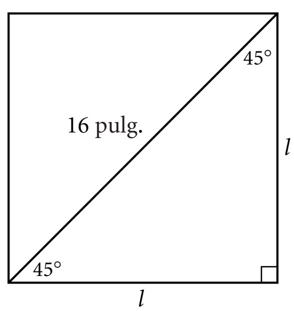
Puedes usar el Teorema de Pitágoras para resolver muchos problemas relacionados con los triángulos rectángulos.

Lee el ejemplo en tu texto. Observa que el problema en ese ejemplo requiere aplicar el Teorema de Pitágoras dos veces: primero para encontrar la diagonal del fondo de la caja y después para encontrar la diagonal de la caja.

En los ejemplos siguientes, trata de resolver cada problema por tu cuenta, antes de leer la solución.

EJEMPLO A Un cuadrado tiene una diagonal de una longitud de 16 pulgadas. ¿Cuál es el área del cuadrado?

▶ ***Solución*** La diagonal de un cuadrado divide el cuadrado en dos triángulos 45°-45°-90°. Para encontrar el área del cuadrado, necesitas conocer la longitud del cateto, *l*, de los triángulos.



Según la Conjetura del triángulo rectángulo isósceles (o según el Teorema de Pitágoras), sabes que $l \cdot \sqrt{2} = 16$, así que $l = \frac{16}{\sqrt{2}}$ pulg. Por lo tanto,

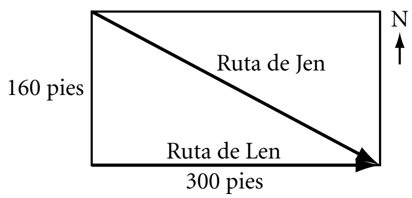
$$\text{Área del cuadrado} = \frac{16}{\sqrt{2}} \cdot \frac{16}{\sqrt{2}} = \frac{256}{2} = 128$$

Así que el área del cuadrado es 128 pulg^2.

(continúa)

EJEMPLO B La banda de marcha de la Clementina High School ensaya en la cancha de fútbol de la escuela. La cancha mide 300 pies de largo de oeste a este y 160 pies de ancho de norte a sur. Len comienza en la esquina sudoeste y marcha a una velocidad de 5 pies por segundo hacia la esquina sudeste. Al mismo tiempo, Jen comienza a marchar diagonalmente de la esquina nordoeste a la esquina sudeste. Si desean reunirse en la esquina en el mismo instante, ¿a qué velocidad debe marchar Jen?

► ***Solución*** Para empezar, haz un dibujo para ilustrar el problema.



Len marcha 300 pies a una velocidad de 5 pies por segundo, así que le tomará $300 \div 5$, ó 60 segundos, para llegar a la esquina suroriental.

Para que se encuentren al mismo tiempo, Jen también debe cubrir su ruta en 60 segundos. Para hallar la distancia que Jen debe marchar, usa el Teorema de Pitágoras.

$$\begin{aligned} 160^2 + 300^2 &= x^2 \\ 25{,}600 + 90{,}000 &= x^2 \\ 115{,}600 &= x^2 \\ 340 &= x \end{aligned}$$

Jen debe cubrir 340 pies en 60 segundos, así que debe marchar a una velocidad de $340 \div 60$, ó aproximadamente 5.7 pies por segundo.

LECCIÓN CONDENSADA

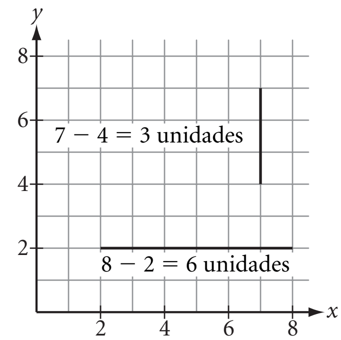
9.5

La distancia en la geometría de coordenadas

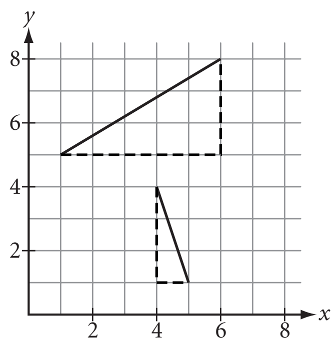
En esta lección

- Aprenderás una fórmula para encontrar la **distancia entre dos puntos** sobre un plano de coordenadas
- Descubrirás la **ecuación general de un círculo**
- Encontrarás el centro y el radio de un círculo basándote en su ecuación

En un plano de coordenadas, puedes encontrar la longitud de un segmento en la dirección *x*, contando los cuadros de la cuadrícula o restando coordenadas *x*. De manera similar, puedes encontrar la longitud de un segmento en la dirección *y* contando o restando coordenadas *y*.



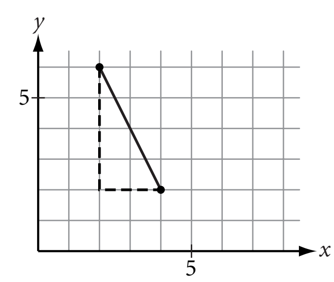
Puedes pensar en cualquier segmento que no esté en la dirección *x* o *y* como la hipotenusa de un triángulo rectángulo con catetos en las direcciones *x* e *y*. Esto te permite usar el Teorema de Pitágoras para encontrar la longitud del segmento.



En la siguiente investigación, usarás esta idea para desarrollar una fórmula para la distancia entre cualesquier dos puntos en un plano de coordenadas.

Investigación 1: La fórmula de la distancia

El Paso 1 de tu libro muestra cuatro segmentos sobre unos planos de coordenadas. Encuentra la longitud de cada segmento, considerando que es la hipotenusa de un triángulo rectángulo. Por ejemplo, el segmento en la parte a es la hipotenusa de un triángulo rectángulo con catetos de longitudes de 2 unidades y 4 unidades, así que usando el Teorema de Pitágoras,



$$\text{longitud}^2 = 2^2 + 4^2$$

$$= 20$$

$$\text{longitud} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4.5 \text{ unidades}$$

En el Paso 2 debes graficar los puntos y luego encontrar la distancia entre ellos. Puedes encontrar la distancia usando el procedimiento que usaste en el Paso 1.

Considera los puntos $A(15, 34)$ y $B(42, 70)$. No sería práctico graficar estos puntos en una cuadrícula, así que ¿cómo podrías encontrar la distancia entre ellos?

(continúa)

Recuerda que puedes hallar una distancia horizontal restando coordenadas *x*, y una distancia vertical restando coordenadas *y*. Usa esta idea para completar los Pasos 3–5 en tu libro y encontrar la distancia entre los puntos $A(15, 34)$ y $B(42, 70)$.

Puedes generalizar tus descubrimientos en esta investigación en una conjetura.

C-86

Fórmula de la distancia La distancia entre los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ se expresa por la fórmula $(AB)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ ó $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

El Ejemplo A en tu libro te muestra cómo aplicar la fórmula de la distancia. Lee el ejemplo atentamente.

El Ejemplo B en tu libro te muestra cómo usar la fórmula de la distancia para escribir la ecuación de un círculo con el centro (5, 4) y el radio 7 unidades. La solución usa el hecho de que el círculo es el conjunto de todos los puntos (x, y) que se sitúan a 7 unidades del punto fijo (5, 4).

Investigación 2: La ecuación de un círculo

En los Pasos 1 y 2 se te pide encontrar las ecuaciones de los círculos, dados sus centros y radios. Por ejemplo, el círculo de la parte a tiene el centro $(1, -2)$ y el radio 8. Si (x, y) es un punto en el círculo, entonces su distancia desde $(1, -2)$ es 8. Usa la fórmula de la distancia para encontrar la ecuación.

$$(x - 1)^2 + (y - (-2))^2 = 8^2$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 64$$

Encuentra las ecuaciones para los círculos de las partes b y c por tu cuenta. La siguiente conjetura resume tu trabajo en la investigación.

C-87

Ecuación de un círculo La ecuación de un círculo con el radio *r* y el centro (h, k) es $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$.

En el Ejemplo C en tu libro, se muestra cómo encontrar el centro y el radio de un círculo, basándote en su ecuación. He aquí otro ejemplo.

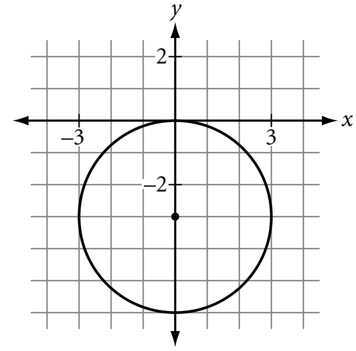
EJEMPLO Grafica el círculo con la ecuación $x^2 + (y + 3)^2 = 9$.

Solución Reescribe la ecuación del círculo en forma estándar (la forma dada en la conjetura).

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$(x - 0)^2 + (y - (-3))^2 = 3^2$$

Ahora puedes identificar fácilmente los valores de *h*, *k*, y *r*. El centro es $(0, -3)$ y el radio es 3. Usa esta información para dibujar la gráfica.



LECCIÓN CONDENSADA

9.6 Círculos y el Teorema de Pitágoras

En esta lección

- Usarás las **conjeturas del círculo** y el **Teorema de Pitágoras** para resolver problemas

En el Capítulo 6, descubriste varias propiedades de los círculos que tienen que ver con ángulos rectos. He aquí dos de las conjeturas de ese capítulo.

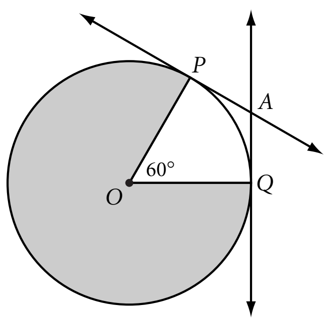
Conjetura de la tangente: Una tangente a un círculo es perpendicular al radio trazado hasta el punto de tangencia.

Conjetura de los ángulos inscritos en un semicírculo: Los ángulos inscritos en un semicírculo son ángulos rectos.

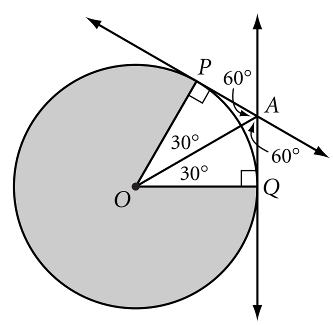
Puedes usar estas conjeturas y el Teorema de Pitágoras para resolver algunos problemas difíciles.

En el Ejemplo A en tu libro, se usa la Conjetura de la tangente y el Teorema de Pitágoras para encontrar el área de la porción sombreada de un círculo. En el Ejemplo B, se usa la Conjetura de los ángulos inscritos en un semicírculo y el Teorema de Pitágoras para encontrar el área de un círculo. Lee estos ejemplos atentamente, y lleva a cabo cada paso. A continuación hay otros dos ejemplos.

EJEMPLO A $\overleftrightarrow{AP}$ y $\overleftrightarrow{AQ}$ son tangentes al círculo O, y $AP = 3$ cm. Encuentra el área de la región sombreada.



Solución Puedes dibujar $\overline{OA}$ para crear dos triángulos 30°-60°-90°. (¿Cómo sabes que el segmento biseca a $\angle O$ para crear dos ángulos de 30°?)



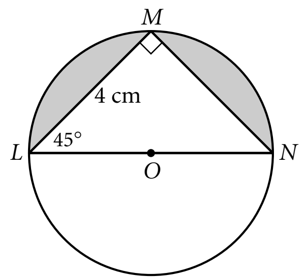
En $\triangle APO$, el cateto más corto, $\overline{AP}$, tiene una longitud de 3 cm, de manera que el cateto más largo, que es el radio del círculo, tiene una longitud de $3\sqrt{3}$ cm.

Como el radio es $3\sqrt{3}$ cm, el área de todo el círculo es 27π cm^2. El área de la región sombreada es $\frac{360 - 60}{360}$, ó $\frac{5}{6}$, del área del círculo. Por lo tanto, el área sombreada es $\frac{5}{6}(27\pi)$, ó $\frac{45}{2}\pi$ cm^2.

(continúa)

EJEMPLO B

Encuentra el área de la región sombreada.



▶ ***Solución***

El área de la región sombreada es el área del semicírculo menos el área de $\triangle LMN$.

$\triangle LMN$ es un triángulo rectángulo isósceles (un triángulo 45°-45°-90°) con un cateto de 4 cm de longitud. Así pues, la longitud de la hipotenusa, que es el diámetro del círculo, es $4\sqrt{2}$ cm. Entonces, el radio del círculo es $2\sqrt{2}$ cm, de manera que el área de todo el círculo es $\pi\left(2\sqrt{2}\right)^2$, ó 8π cm^2. Por lo tanto, el área del semicírculo es 4π cm^2. El área de $\triangle LMN$ es $\frac{1}{2}(4)(4)$, u 8 cm^2. Así pues, el área de la región sombreada es $(4\pi - 8)$ cm^2.