LECCIÓN CONDENSADA

5.1 Funciones exponenciales

En esta lección

- Escribirás una **fórmula recursiva** para modelar un **deterioro radiactivo**
- Encontrarás una **función exponencial** que pasa por los puntos de una sucesión geométrica
- Aprenderás sobre la **semivida** del deterioro exponencial el y **tiempo de duplicación** del crecimiento exponencial

En el Capítulo 1, usaste fórmulas recursivas para modelar el crecimiento y el deterioro geométricos. Las fórmulas recursivas sólo generan valores discretos, tales como la cantidad de dinero en una cuenta bancaria después de 1 ó 2 años. En muchas situaciones reales, el crecimiento y el deterioro se dan de manera continua. En esta lección, encontrarás fórmulas explícitas que te permiten modelar los crecimientos y los deterioros continuos.

Investigación: El deterioro radiactivo

Lee la sección Science Connection en la página 238 de tu libro. Después lee el primer párrafo y el Procedure Note de la investigación. Si tienes un dado, puedes realizar el experimento por tu cuenta, siguiendo estos pasos:

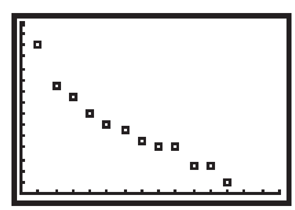
1. Dibuja 30 puntos en una hoja de papel.
2. Lanza el dado una vez por cada punto. Si sacas un 1, borra o tacha el punto.
3. Cuenta y registra el número de puntos restantes.
4. Repite los Pasos 2 y 3 hasta que haya menos de tres puntos restantes.

Después de reunir los datos, completa los Pasos 1–6 en tu libro. Para obtener los resultados dados a continuación, se usó la siguiente muestra de datos:

Etapa	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Gente en pie (o puntos restantes)	30	26	19	17	14	12	11	9	8	8	5	5	2

Paso 1 Observa la tabla anterior.

Paso 2 Aquí se presenta una gráfica de los datos.



[0, 15, 1, 0, 30, 2]

Para hallar una fórmula que modele los datos, observa las razones de los valores consecutivos de y:

$$\frac{26}{30} \approx 0.867, \frac{19}{26} \approx 0.731, \frac{17}{19} \approx 0.895, \frac{14}{17} = 0.824, \frac{12}{14} \approx 0.857,$$

$$\frac{11}{12} = 0.917, \frac{9}{11} \approx 0.818, \frac{8}{9} \approx 0.889, \frac{8}{8} = 1, \frac{5}{8} = 0.625, \frac{5}{5} = 1, \frac{2}{5} = 0.4$$

Usando la media de estos valores, 0.8186, como razón común, encontrarás la fórmula recursiva

$u_0 = 30$

$u_n = 0.8186 \cdot u_{n-1} \qquad \text{donde } n \geq 1$

(continúa)

Lección 5.1 • Funciones exponenciales (continuación)

Paso 3 Para encontrar una expresión para el octavo término, observa el patrón:

$u_0 = 30$

$u_1 = 0.8186 \cdot u_0 = 0.8186^1 \cdot 30$

$u_2 = 0.8186 \cdot u_1 = 0.8186(0.8186 \cdot 30) = 0.8186^2 \cdot 30$

$u_3 = 0.8186 \cdot u_2 = 0.8186\big(0.8186 \cdot u_1\big) = 0.8186\big(0.8186^2 \cdot u_0\big) = 0.8186^3 \cdot 30$

Continuando con el patrón, $u_8 = 0.8186^8 \cdot 30$.

Paso 4 Usando el patrón del Paso 3, $u_n = 0.8186^n \cdot 30$. Observa que se trata de una **fórmula explícita** para la secuencia. Puedes usarla para encontrar el valor de cualquier término sin hallar los valores de los términos anteriores.

Paso 5 La semivida es el tiempo en que la mitad de la "muestra" deteriora (es decir, en que 15 estudiantes se sientan o se borran 15 puntos). De la tabla podemos ver que la semivida de la muestra se sitúa entre 3 y 4.

Paso 6 En una muestra radiactiva, una cierta fracción de átomos sufren un deterioro radiactivo en cada periodo de tiempo. En esta actividad, cada lanzamiento del dado representa un periodo y los estudiantes que se sientan (o los puntos borrados) representan los átomos que se deterioran.

La fórmula de una secuencia geométrica genera un conjunto de puntos discretos. Ahora aprenderás a hallar la ecuación de una curva que pasa por los puntos. Trabaja el ejemplo en tu libro, y después lee el ejemplo siguiente.

EJEMPLO Una moneda rara de la colección de Jo vale \$450 en la actualidad. El valor ha aumentado en 15% cada año. Si el valor continúa aumentando a este ritmo, ¿cuánto valdrá la moneda dentro de $11\frac{1}{2}$ años?

► ***Solución*** El valor se multiplica por $(1 + 0.15)$ cada año:

$450 \cdot (1 + 0.15)$ Valor después de 1 año.

$450 \cdot (1 + 0.15) \cdot (1 + 0.15) = 450(1 + 0.15)^2$ Valor después de 2 años.

$450 \cdot (1 + 0.15) \cdot (1 + 0.15) \cdot (1 + 0.15) = 450(1 + 0.15)^3$ Valor después de 3 años.

$450 \cdot (1 + 0.15)^n$ Valor después de n años.

Así pues, la fórmula explícita es $u_n = 450(1 + 0.15)^n$. La ecuación de la función continua que pasa por los puntos es $y = 450(1 + 0.15)^x$.

Puedes usar la función continua para hallar el valor de la moneda en cualquier tiempo. Para encontrar el valor después de $11\frac{1}{2}$ años, sustituye x por 11.5.

$y = 450(1 + 0.15)^{11.5} = \$2245.11$

La función continua encontrada en el ejemplo es una **función exponencial,** que consiste en una función continua con una variable en el exponente. Lee el recuadro "Exponential Function" (Función exponencial) y el texto que sigue en la página 240 de tu libro.

LECCIÓN CONDENSADA

5.2

Propiedades de los exponentes y funciones de potencias

En esta lección

- Repasarás las **propiedades de los exponentes**
- Resolverás unas **ecuaciones exponenciales** y unas **ecuaciones de potencias**

Recuerda que en una expresión exponencial a^n, a es la **base** y n es el **exponente.** Puedes decir que a está **elevada a la potencia** n. Si el exponente es un entero positivo, puedes escribir la expresión en **forma expandida.** Por ejemplo, $5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$.

En tu primer clase de álgebra, aprendiste unas propiedades para reescribir las expresiones que contienen exponentes. En esta lección, repasarás estas propiedades y verás cómo pueden ayudarte a resolver ecuaciones.

Investigación: Propiedades de los exponentes

Completa la investigación por tu propia cuenta. Cuando hayas terminado, compara tus resultados con los siguientes.

Paso 1

a. $2^3 \cdot 2^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^7$

b. $x^5 \cdot x^{12} = (x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x) \cdot (x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x) = x^{17}$

c. $10^2 \cdot 10^5 = (10 \cdot 10) \cdot (10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10) = 10^7$

Paso 2 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Paso 3

a. $\dfrac{4^5}{4^2} = \dfrac{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{4}}{\cancel{4} \cdot \cancel{4}} = 4^3$

b. $\dfrac{x^8}{x^6} = \dfrac{\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot x \cdot x}{\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x}} = x^2$

c. $\dfrac{(0.94)^{15}}{(0.94)^5} =$

$$\frac{(0.94) \cdot (0.94) \cdot (0.94) \cdot (0.94) \cdot (0.94) \cdot (0.94) \cdot (0.94) \cdot (0.94) \cdot (0.94) \cdot (0.94) \cdot (\cancel{0.94}) \cdot (\cancel{0.94}) \cdot (\cancel{0.94}) \cdot (\cancel{0.94}) \cdot (\cancel{0.94})}{(\cancel{0.94}) \cdot (\cancel{0.94}) \cdot (\cancel{0.94}) \cdot (\cancel{0.94}) \cdot (\cancel{0.94})}$$

$= (0.94)^{10}$

Paso 4 $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Paso 5

a. $\dfrac{2^3}{2^4} = \dfrac{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}}{2 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}} = \dfrac{1}{2^1}$

b. $\dfrac{4^5}{4^7} = \dfrac{\cancel{4} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{4}}{4 \cdot 4 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{4}} = \dfrac{1}{4^2}$

c. $\dfrac{x^3}{x^8} = \dfrac{\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x}}{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x}} = \dfrac{1}{x^5}$

Paso 6

a. $2^{3-4} = 2^{-1}$ **b.** $4^{5-7} = 4^{-2}$ **c.** $x^{3-8} = x^{-5}$

Paso 7 $\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$

Paso 8 Un ejemplo es $\left(2^3\right)^4 = \left(2^3\right)\left(2^3\right)\left(2^3\right)\left(2^3\right) = 2^{3+3+3+3} = 2^{3 \cdot 4}$. Puedes generalizar este resultado como $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$.

(continúa)

Lección 5.2 • Propiedades de los exponentes y funciones de potencias (continuación)

Paso 9 Un ejemplo es $(2 \cdot 3)^3 = (2 \cdot 3)(2 \cdot 3)(2 \cdot 3) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 3^3$. Puedes generalizar este resultado como $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.

Paso 10 Considera la expresión $\frac{a^3}{a^3}$. Al dividir, tenemos $\frac{a^3}{a^3} = \frac{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}} = 1$. Por la propiedad del Paso 4, $\frac{a^3}{a^3} = a^{3-3} = a^0$. Por tanto $a^0 = 1$.

Las propiedades de los exponentes se resumen en la página 246 de tu libro. Asegúrate de leer la propiedad de la potencia de un cociente, la propiedad de la igualdad de las potencias, y la propiedad de la igualdad de las bases comunes. La investigación no involucró estas propiedades. Intenta crear unos ejemplos que te convenzan de que tales propiedades son ciertas.

El Ejemplo A en tu libro ilustra un método para resolver las ecuaciones cuando ambos lados pueden escribirse como expresiones exponenciales con una base común. Intenta resolver cada ecuación antes de leer la solución. Aquí hay otro ejemplo:

EJEMPLO A Resuelve.

a. $125^x = 5$ **b.** $16^x = \frac{1}{64}$

Solución Convierte cada lado de la ecuación a una base común, luego usa las propiedades de los exponentes.

a.

$125^x = 5$	Ecuación original.
$(5^3)^x = 5^1$	$5^3 = 125$ y $5^1 = 5$.
$5^{3x} = 5^1$	Usa la propiedad de la potencia de una potencia.
$3x = 1$	Usa la propiedad de la igualdad de las bases comunes.
$x = \frac{1}{3}$	Divide.

b.

$16^x = \frac{1}{64}$	Ecuación original.
$(2^4)^x = \frac{1}{2^6}$	$2^4 = 16$ y $2^6 = 64$.
$2^{4x} = 2^{-6}$	Usa la propiedad de la potencia de una potencia y la propiedad del recíproco.
$4x = -6$	Usa la propiedad de la igualdad de las bases comunes.
$x = -\frac{3}{2}$	Divide.

Una función exponencial tiene una variable en el exponente. Una **función de potencias** tiene una variable en la base.

Función exponencial	Función de potencias
$y = ab^x$, en la que a y b son constantes	$y = ax^n$, en la que a y n son constantes

(continúa)

Lección 5.2 • Propiedades de los exponentes y funciones de potencias (continuación)

El Ejemplo B en tu libro muestra cómo puedes usar las propiedades de los exponentes para resolver algunas ecuaciones que contienen variables elevadas a una potencia. Intenta resolver cada ecuación por ti mismo, antes de leer la solución. Después lee el ejemplo siguiente.

EJEMPLO B

Resuelve.

a. $8x^3 = 4913$ **b.** $x^{4.8} = 706$

► ***Solución***

Usa la propiedad de la igualdad de las potencias y escoge un exponente que deshaga el exponente de x.

a.

$8x^3 = 4913$	Ecuación original.
$x^3 = 614.125$	Divide ambos lados entre 8.
$\left(x^3\right)^{1/3} = 614.125^{1/3}$	Usa la propiedad de la igualdad de las potencias.
$x = 1.5$	Usa tu calculadora para hallar $614.125^{1/3}$.

b.

$x^{4.8} = 706$	Ecuación original.
$\left(x^{4.8}\right)^{1/4.8} = 706^{1/4.8}$	Usa la propiedad de la igualdad de las potencias.
$x \approx 4$	Usa tu calculadora para hallar $706^{1/4.8}$.

Las propiedades de los exponentes se definen solamente para las bases positivas. Entonces, la utilización de tales propiedades solamente produce una solución para cada ecuación. En la parte b anterior, $x \approx -4$ también es una solución.

LECCIÓN CONDENSADA

5.3 Exponentes racionales y raíces

En esta lección

- Aprenderás cómo se relacionan los **exponentes racionales** con las **raíces**
- Escribirás unas ecuaciones de curvas exponenciales en **forma punto-razón**

Sabes que puedes considerar los exponentes enteros positivos como una multiplicación repetida. Por ejemplo, $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5$. Pero, ¿cómo puedes considerar los exponentes fraccionarios? Explorarás esta cuestión en la investigación.

Investigación: Llegar a la raíz

Completa la investigación en tu libro, por tu cuenta. Después compara tus resultados con los siguientes.

Paso 1 En una tabla de calculadora se muestra que $x^{1/2}$ es indefinido para los números enteros menores que 0, y es un entero positivo para los valores que son cuadrados perfectos. De hecho, parece que $x^{1/2} = \sqrt{x}$.

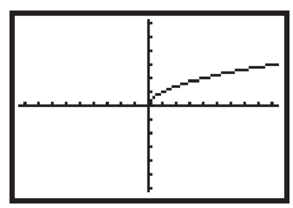
X	Y1
0	0
1	1
2	1.4142
3	1.7321
4	2
5	2.2361
6	2.4495

Y1=X^(1/2)

X	Y1
7	2.6458
8	2.8284
9	3
10	3.1623
11	3.3166
12	3.4641
13	3.6056

Y1=X^(1/2)

Paso 2 Por la gráfica, parece que $y = x^{1/2}$ es equivalente a $y = \sqrt{x}$. Graficar ambas funciones en la misma ventana lo verifica.



$[-9.4, 9.4, 1, -6.2, 6.2, 1]$

Paso 3 Elevar un número a una potencia de $\frac{1}{2}$ es lo mismo que sacar su raíz cuadrada. Por ejemplo, $\sqrt{4} = 2$ y $4^{1/2} = 2$.

Paso 4 Aquí se presenta una tabla para $y = 25^x$, en la cual x se expresa en incrementos de $\frac{1}{2}$.

X	Y1
.5	5
1	25
1.5	125
2	625
2.5	3125
3	15625
3.5	78125

Y1=25^X

Paso 5 Cada entrada de la tabla es la raíz cuadrada de 25, que es 5, elevada al numerador. Esto es, $25^{1/2} = 5^1$, $25^{2/2} = 5^2$, $25^{3/2} = 5^3$, y así sucesivamente. Si el mismo patrón se cumple para $y = 49^x$, entonces $49^{3/2} = \left(\sqrt{49}\right)^3 = 7^3 = 343$.

Paso 6 $27^{2/3}$ es la raíz cúbica de 27 elevada a la segunda potencia: $27^{2/3} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^2 = 3^2 = 9$. De manera parecida, $8^{5/3} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^5 = 2^5 = 32$.

Paso 7 Para hallar $a^{m/n}$, saca la raíz enésima de a, y después eleva el resultado a la potencia de m. Esto es, $a^{m/n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$.

(continúa)

Lección 5.3 • Exponentes racionales y raíces

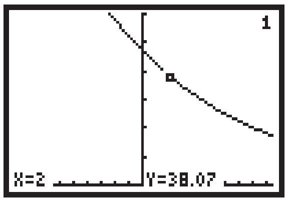
En tu libro, lee el párrafo que sigue a la investigación y el recuadro "Definition of Rational Exponents" (Definición de los exponentes racionales), en el que se resume lo que has descubierto en la investigación. Después intenta resolver las ecuaciones del Ejemplo A, que implican unos exponentes racionales.

Observa que, debido a que se puede escribir una función como $y = \sqrt[7]{x^3}$ de la forma $y = x^{3/7}$, ésta se considera como una función de potencias. Puedes aplicar todas las aplicaciones que aprendiste en el Capítulo 4 a las funciones de potencias. Por ejemplo, la gráfica de $y = x^{3/7} + 3$ es la gráfica de $y = x^{3/7}$ corrida 3 unidades hacia arriba.

Ahora, pongamos la atención en las ecuaciones exponenciales. En la *forma general* de una ecuación exponencial, $y = ab^x$, b es el factor de crecimiento o de deterioro. Cuando sustituyes x por 0, obtienes $y = a$. Esto significa que a es el valor inicial de la función al tiempo 0 (la intersección y).

Existen otras formas útiles de ecuaciones exponenciales. Recuerda que si conoces un punto $\left(x_1, y_1\right)$ de una recta y la pendiente de dicha recta, puedes escribir una ecuación de la forma punto-pendiente: $y = y_1 + m\left(x - x_1\right)$. Del mismo modo, si conoces un punto $\left(x_1, y_1\right)$ de una curva exponencial y la razón común b entre los puntos separados por 1 unidad horizontal (es decir, el factor de crecimiento o deterioro), puedes escribir una ecuación de la **forma punto-razón:** $y = y_1 \cdot b^{x - x_1}$.

Veamos un ejemplo para darnos cuenta de cómo están relacionadas las formas general y punto-razón. Haz una gráfica de la ecuación general $y = 47(0.9)^x$ en tu calculadora. Después rastrea la gráfica para hallar las coordenadas de un punto de la curva. Escogeremos (2, 38.07).



[−9.4, 9.4, 1, 0, 60, 10]

Usando (2, 38.07), puedes escribir una ecuación de la forma punto-razón: $y = 38.07(0.9)^{x-2}$. Un poco de álgebra muestra que esto es equivalente a la ecuación general:

$y = 38.07(0.9)^{x-2}$	Forma punto-razón.
$= 38.07(0.9)^x(0.9)^{-2}$	Usa la propiedad multiplicativa de los exponentes.
$= 47(0.9)^x$	Usa tu calculadora para multiplicar $38.07 \cdot (0.9)^{-2}$.

Trabaja el Ejemplo B en tu libro. Pon especial atención a la técnica utilizada para encontrar el valor de b.

El texto después del ejemplo explica otra manera de hallar la ecuación, sin tener que resolver para b. Lee dicho texto con mucha atención. Aquí se presenta un resumen del método:

1. De la parte a del Ejemplo B, vemos que la gráfica pasa por (4, 40) y (7, 4.7).
2. La razón de valores y para los dos puntos es $\frac{4.7}{40}$. Observa que *no* es el valor de b, porque los valores de x 4 y 7 no son enteros consecutivos; la razón $\frac{4.7}{40}$ está distribuida en 3 unidades horizontales, en vez de una sola.
3. Escribe la ecuación de la curva que pasa por (4, 40) y que *sí* tiene un valor de b de $\frac{4.7}{40}$: $y = 40\left(\frac{4.7}{40}\right)^{x-4}$.
4. Empieza con la ecuación del paso anterior. Divide el valor x entre 3 para estirar la gráfica 3 unidades horizontalmente: $y = 40\left(\frac{4.7}{40}\right)^{(x-4)/3}$.

LECCIÓN CONDENSADA

5.4 Aplicaciones de las ecuaciones exponenciales y de potencias

En esta lección

- Resolverás problemas de aplicación que implican funciones exponenciales y de potencias

Los ejemplos en tu libro son aplicaciones de funciones exponenciales y de potencias. En ambos ejemplos, el problema se resuelve al escribir una ecuación y después deshacer el orden de las operaciones.

Trabaja el Ejemplo A en tu libro. Después lee el ejemplo siguiente. Intenta resolver el problema por tu cuenta, antes de leer la solución.

EJEMPLO A La empresa Computer Central cerrará sus operaciones dentro de 10 semanas. El dueño desea bajar el precio de cada producto de la tienda por el mismo porcentaje cada semana, de modo que—al final de las 10 semanas—la mercancía restante tenga un precio de 25% de su precio original. ¿En qué porcentaje necesita bajar los precios cada semana para obtener tal resultado?

► ***Solución*** Al final de las 10 semanas, el precio de una computadora, originalmente de \$1000, debe reducirse a \$250. La tasa de descuento, r, no se conoce. Escribe una ecuación y resuélvela para r.

$250 = 1000(1 - r)^{10}$	Ecuación original.
$0.25 = (1 - r)^{10}$	Deshaz la multiplicación por 1000, dividiendo ambos lados entre 1000.
$0.25^{1/10} = \left((1 - r)^{10}\right)^{1/10}$	Deshaz la potencia de 10, elevando ambos lados a la potencia $\frac{1}{10}$.
$0.25^{1/10} = 1 - r$	Usa las propiedades de los exponentes.
$r = 1 - 0.25^{1/10}$	Suma r y $-0.25^{1/10}$ a ambos lados.
$r = 0.1294$	Usa una calculadora para evaluar $1 - 0.25^{1/10}$.

El dueño necesita reducir los precios en aproximadamente 13% cada semana.

Observa que no importa cuál sea el precio original con que empieces. Por ejemplo, si empiezas con un precio de \$2400, tu ecuación sería $600 = 2400(1 - r)^{10}$. Después de dividir ambos lados entre 2400, tendrías la misma ecuación del segundo paso anterior.

El Ejemplo B en tu libro es una aplicación de la forma punto-razón de una ecuación exponencial. Sin embargo, este problema tiene una modificación, pues la función exponencial debe trasladarse de modo que se aproxime, a la larga, a un valor que no sea cero. Trabaja el ejemplo con lápiz y papel. Después trabaja el ejemplo siguiente.

(continúa)

Lección 5.4 • Aplicaciones de las ecuaciones exponenciales y de potencias (continuación)

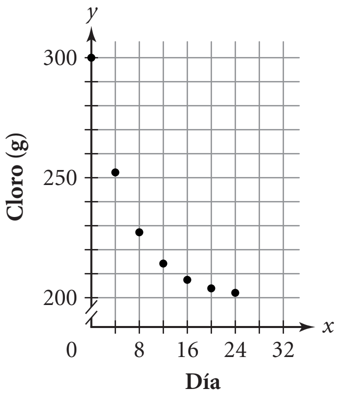
EJEMPLO B

En la tabla se muestra la cantidad de cloro que hay en la piscina de Chang cada cuatro días. Encuentra una ecuación que modele los datos de la tabla.

Día x	0	4	8	12	16	20	24
Cloro (g) y	300	252.20	227.25	214.22	207.43	203.88	202.02

Solución

Grafica los datos. La gráfica muestra una curva, de modo que los datos no son lineales. El patrón parece ser una secuencia geométrica decreciente, así que una ecuación de deterioro exponencial sería el mejor modelo. Sin embargo, observa que a la larga el valor parece ser 200, no 0.



La función de deterioro exponencial en forma de punto-razón es $y = y_1 \cdot b^{x-x_1}$. Sin embargo, debido a que esta función, a la larga, se aproxima a cero, debe ser trasladada 200 unidades hacia arriba. Para hacer esto, sustituye y por $y - 200$. Debido a que el coeficiente, y_1, también es un valor y, y_1 debe sustituirse por $y_1 - 200$ para tomar en cuenta la traslación.

La ecuación punto-razón es ahora $y - 200 = (y_1 - 200) \cdot b^{x-x_1}$. Para encontrar el valor de b, sustituye (x_1, y_1) por el valor de cualquier punto, digamos (20, 203.88), y resuelve para b.

$$y - 200 = (y_1 - 200) \cdot b^{x-x_1}$$ Ecuación original.

$$y - 200 = (203.88 - 200) \cdot b^{x-20}$$ Sustituye (x_1, y_1) por (20, 203.88).

$$y - 200 = 3.88 \cdot b^{x-20}$$ Resta lo que está entre paréntesis.

$$\frac{y - 200}{3.88} = b^{x-20}$$ Divide ambos lados entre 3.88.

$$\left(\frac{y - 200}{3.88}\right)^{1/(x-20)} = b$$ Eleva ambos lados a la potencia $\frac{1}{x-20}$ para resolver para b.

Ahora tienes b en términos de x y y. Al evaluar b para todos los demás puntos, se obtienen los siguientes valores:

Día x	0	4	8	12	16	24
Cloro (g) y	300	252.20	227.25	214.22	207.43	202.02
b	0.850	0.8501	0.8501	0.8501	0.8501	0.8494

Todos los valores de b se acercan a 0.85, de modo que debes usar tal valor para b. Por tanto, un modelo para los datos es $y - 200 = (203.88 - 200) \cdot 0.85^{x-20}$, ó $y = 200 + 3.88(0.85)^{x-20}$.

LECCIÓN CONDENSADA

5.5

Construcción de los inversos de las funciones

En esta lección

- Encontrarás los **inversos** de las funciones
- Aprenderás cómo la gráfica y la ecuación de una función se relacionan con la gráfica y la ecuación de su inverso
- Compondrás una función con su inverso

Observa las dos gráficas que están al inicio de la Lección 5.5 en tu libro. Estas gráficas representan los mismos datos. Sin embargo, la variable independiente de la gráfica a la izquierda es la variable dependiente de la gráfica a la derecha, y la variable dependiente de la gráfica a la izquierda es la variable independiente de la gráfica a la derecha.

Una relación que es resultado de intercambiar las variables independiente y dependiente de una función se llama el **inverso** de la función.

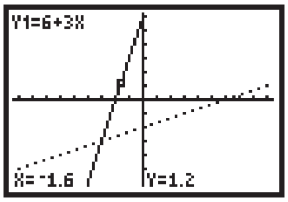
Investigación: El inverso

Parte 1

Completa la Parte 1 de la investigación por tu cuenta, y después compara tus resultados con los siguientes.

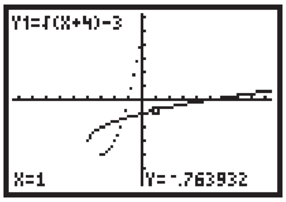
Paso 1

i.

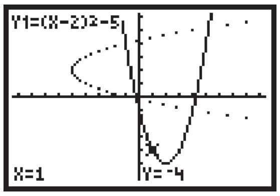


$[-9.4, 9.4, 1, -6.2, 6.2\ , 1]$

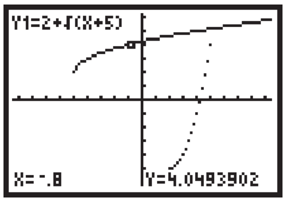
ii.



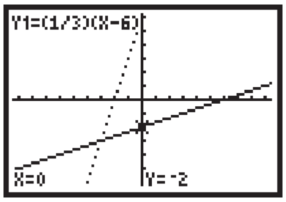
iii.



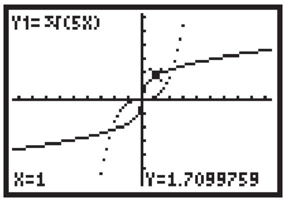
iv.



v.



vi.



Paso 2

i. $(0, -2), (3, -1), (6, 0)$

ii. $(-3, 4), (-1, 0), (0, 5)$

iii. $(-5, 2), (-4, 3), (-4, 1)$

iv. $(2, -5), (4, -1), (5, 4)$

v. $(-2, 0), (-1, 3), (0, 6)$

vi. $(0, 0), (1.6, 2), (-1.6, -2)$

Paso 3

i. $y = \frac{1}{3}(x - 6)$

ii. $y = (x + 3)^2 - 4,\ x \geq -3$

iii. $y = \pm\sqrt{x + 5} + 2$

iv. $y = (x - 2)^2 - 5,\ x \geq 2$

v. $y = 3x + 6$

vi. $y = \left(\frac{1}{5}\right)x^3$

(continúa)

Lección 5.5 • Construcción de los inversos de las funciones (continuación)

Paso 4

	Función	Inverso
i.	$y = 6 + 3x$	$y = \frac{1}{3}(x - 6)$
ii.	$y = \sqrt{x + 4} - 3$	$y = (x + 3)^2 - 4, x \geq -3$
iii.	$y = (x - 2)^2 - 5$	$y = \pm\sqrt{x + 5} + 2$
iv.	$y = 2 + \sqrt{x + 5}$	$y = (x - 2)^2 - 5, x \geq 2$
v.	$y = \frac{1}{3}(x - 6)$	$y = 3x + 6$
vi.	$y = \sqrt[3]{5x}$	$y = \left(\frac{1}{5}\right)x^3$

Parte 2

Ahora, termina la Parte 2, y después lee las respuestas siguientes.

Paso 5 La gráfica del inverso de una función es la reflexión de la gráfica de esa función a través de la recta $y = x$.

Paso 6 i y v son inversos, y iii y iv son inversos parciales. (El dominio de iii es todo x, pero el rango de iv es $y \geq 2$.)

Paso 7 Para hallar la ecuación del inverso de una función, cambia x por y, y después resuelve para y.

Resuelve el problema planteado en el Ejemplo A en tu libro, y luego lee la solución.

Tal vez notaste en la investigación que es posible que el inverso de una función no sea una función. Por ejemplo, el inverso de la función $y = (x - 2)^2 - 5$ es $y = \pm\sqrt{x + 5} + 2$, que hace coincidir cada valor de x (excepto -5) con dos valores de y.

Cuando una función y su inverso son *ambas* funciones, la función se llama una **función uno a uno** (debido a que hay una correspondencia de uno a uno entre los valores del dominio y los valores del rango). Una función es uno a uno si su gráfica pasa la prueba de la recta vertical y la prueba de la recta horizontal. El inverso de la función $f(x)$ que es uno a uno se escribe como $f^{-1}(x)$.

El Ejemplo B en tu libro ilustra que cuando compones una función con su inverso, obtienes x. El ejemplo siguiente utiliza una función diferente para ilustrar lo mismo.

(continúa)

Lección 5.5 • Construcción de los inversos de las funciones (continuación)

EJEMPLO Considera la función $f(x) = \sqrt{x+4} - 3$. Encuentra $f\big(f^{-1}(x)\big)$ y $f^{-1}(f(x))$.

► ***Solución*** En la investigación, encontraste que $f^{-1}(x) = (x+3)^2 - 4$ para $x \geq -3$.
Primero, encuentra $f\big(f^{-1}(x)\big)$.

$f\big(f^{-1}(x)\big) = \sqrt{\big((x+3)^2 - 4\big) + 4} - 3$	Sustituye x por $f^{-1}(x)$.
$= \sqrt{x^2 + 6x + 9} - 3$	Desarrolla $(x+3)^2$ y simplifica la expresión que está dentro del signo de la raíz cuadrada.
$= \sqrt{(x+3)^2} - 3$	Factoriza la expresión que está dentro del signo de la raíz cuadrada.
$= x + 3 - 3$	Porque $x \geq -3$, $\sqrt{(x+3)^2} = x + 3$.
$= x$	Suma.

Ahora encuentra $f^{-1}(f(x))$.

$f^{-1}(f(x)) = \big(\sqrt{x+4} - 3 + 3\big)^2 - 4$	Sustituye x por $f(x)$.
$= \big(\sqrt{x+4}\big)^2 - 4$	Resta.
$= x + 4 - 4$	$\big(\sqrt{x+4}\big)^2 = x + 4$
$= x$	Resta.

LECCIÓN CONDENSADA

5.6

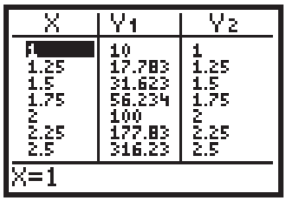
Funciones logarítmicas

En esta lección

- Aprenderás el significado de un **logaritmo**
- Usarás los logaritmos para resolver unas ecuaciones exponenciales

En la Lección 5.2, resolviste algunas ecuaciones en las cuales x es un exponente. En todas las ecuaciones, fue posible escribir ambos lados con una base común. Desafortunadamente, por lo general esto no es posible. En esta lección, descubrirás un método poderoso para resolver para x en una ecuación exponencial. Este método implica una nueva función llamada **logaritmo,** cuya abreviatura es log.

Investigación: Exponentes y logaritmos



Pasos 1 y 2 Introduce las ecuaciones $Y_1 = 10^x$ y $Y_2 = \log(10^x)$ en tu calculadora y haz una tabla de valores. Observa los resultados de los valores negativos y decimales, así como los valores para los números enteros.

Para cada valor de x, $\log(10^x) = x$.

Paso 3 Usa lo que observaste en los Pasos 1 y 2 para terminar el Paso 3 en tu libro. Aquí están los resultados:

a. $\log(10^{2.5}) = 2.5$ **b.** $\log(10^{-3.2}) = -3.2$

c. $\log(10^0) = 0$ **d.** $\log(10^x) = x$

Paso 4 Completa ahora las afirmaciones del Paso 4. Aquí están los resultados:

a. Si $100 = 10^2$, entonces $\log 100 = 2$.

b. Si $400 \approx 10^{2.6021}$, entonces $\log 400 \approx 2.6021$.

c. Si $500 \approx 10^{2.6990}$, entonces $\log 500 \approx 2.6990$.

d. Si $y = 10^x$, entonces $\log y = x$.

Paso 5 Para resolver las ecuaciones del Paso 5, saca el logaritmo de ambos lados.

a. $300 = 10^x$ Ecuación original.

$\log 300 = \log 10^x$ Saca el logaritmo de ambos lados.

$2.4771 \approx x$ Log $10^x = x$. Usa una calculadora para hallar log 300.

b. $47 = 10^x$ Ecuación original.

$\log 47 = \log 10^x$ Saca el logaritmo de ambos lados.

$1.6721 \approx x$ Log $10^x = x$. Usa una calculadora para hallar log 47.

c. $0.01 = 10^x$ Ecuación original.

$\log 0.01 = \log 10^x$ Saca el logaritmo de ambos lados.

$-2 = x$ Log $10^x = x$. Encuentra log 0.01 mentalmente o con una calculadora.

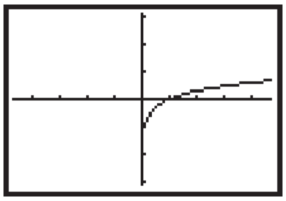
(continúa)

d. $y = 10^x$ Ecuación original.

$\log y = \log 10^x$ Saca el logaritmo de ambos lados.

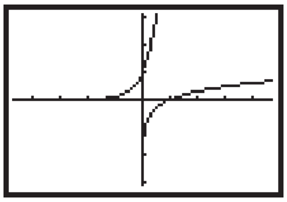
$\log y = x$ $\text{Log } 10^x = x$.

Paso 6 La gráfica de $y = \log x$ se muestra aquí. Es una función con dominio $x > 0$ y un rango de todos los números reales.



$[-4.7, 4.7, 1, -3.1, 3.1, 1]$

Paso 7 Aquí se muestran las gráficas de $y = 10^x$ y de su inverso. El inverso de $y = 10^x$ es $y = \log x$.



$[-4.7, 4.7, 1, -3.1, 3.1, 1]$

Paso 8 Si $f(x) = 10^x$, entonces $f\left(f^{-1}(x)\right) = 10^{\log x} = x$.

Log x es el exponente que colocas en la base 10 para obtener x. Por ejemplo, $\log 1000 = 3$ porque $10^3 = 1000$. También puedes encontrar logaritmos para otras bases. La base se especifica como subíndice después de la palabra "log". Por ejemplo, $\log_2 32$ es 5, el exponente que tienes que ponerle a 2 para obtener 32. Si no se especifica ninguna base, se supone que $\log x$ es el logaritmo base 10 (o sea, $\log x$ significa $\log_{10} x$). Los logaritmos con base 10 se llaman **logaritmos comunes.**

Resuelve la ecuación dada en el Ejemplo A en tu libro, y después lee la solución. Luego, lee el párrafo corto que sigue al Ejemplo A, y la definición de logaritmo.

El Ejemplo B muestra cómo usar los logaritmos para resolver una ecuación exponencial cuando la base no es 10. La solución implica reescribir la ecuación de modo que cada lado *sí* sea una potencia con base 10. Observa que en el segundo paso se usa el hecho de que $4 = 10^{\log 4}$, y en el tercer paso se utiliza el hecho de que $128 = 10^{\log 128}$. En realidad, para cualquier número a, $a = 10^{\log a}$. Asegúrate de que entiendes por qué eso tiene sentido: El logaritmo común de un número a es el exponente que necesitas poner a 10 para obtener a, de modo que $10^{\log a} = a$. Comprueba que lo has entendido, resolviendo la ecuación del siguiente ejemplo.

EJEMPLO Resuelve $7^x = 211$.

► ***Solución*** Reescribe cada lado de la ecuación como una potencia de base 10.

$7^x = 211$ Ecuación original.

$\left(10^{\log 7}\right)^x = 10^{\log 211}$ Usa el hecho de que $a = 10^{\log a}$.

$\log 7 \cdot x = \log 211$ Usa la propiedad de la igualdad de las bases comunes.

$x = \dfrac{\log 211}{\log 7}$ Divide ambos lados entre log 7.

$x \approx 2.7503$ Usa una calculadora para evaluar.

Observa la ecuación original, $7^x = 211$, del ejemplo anterior. La solución de esta ecuación es el exponente que tienes que poner en 7 para obtener 211. En otras palabras, $x = \log_7 211$. El cuarto paso de la solución indica que $\log_7 211 = \frac{\log 211}{\log 7}$. Esto ilustra la propiedad del cambio de bases de los logaritmos. Lee esta propiedad en tu libro. Luego, lee el resto de la lección.

LECCIÓN CONDENSADA

5.7 Propiedades de logaritmos

En esta lección

- Usarás unos logaritmos para ayudarte a hacer unos cálculos complejos
- Usarás una regla de cálculo para explorar las propiedades de los logaritmos

Lee el primer párrafo de la lección en la página 279 de tu libro. Luego, lee el Ejemplo A, siguiéndolo con papel y lápiz. Las soluciones de las tres partes toman en cuenta el hecho de que $m = 10^{\log m}$. El ejemplo siguiente te dará más práctica. Resuelve cada parte por tu cuenta, antes de leer la solución.

EJEMPLO

Convierte los números en logaritmos para resolver estos problemas.

a. Halla $37.678 \cdot 127.75$ sin usar la tecla de multiplicación de tu calculadora.

b. Halla $\frac{37.678}{127.75}$ sin utilizar la tecla de división de tu calculadora.

c. Halla $9.3^{1.8}$ sin usar la tecla de exponenciación de tu calculadora.

► ***Solución***

a. $37.678 \cdot 127.75 = 10^{\log 37.678} \cdot 10^{\log 127.75} = 10^{\log 37.678 + \log 127.75} = 4813.3645$

b. $\frac{37.678}{127.75} = \frac{10^{\log 37.678}}{10^{\log 127.75}} = 10^{\log 37.678 - \log 127.75} \approx 0.2949$

c. $\left(10^{\log 9.3}\right)^{1.3} = 10^{(\log 9.3)\cdot 1.3} \approx 18.1563$

Antes de que hubiera calculadoras, las personas hacían cálculos como los anteriores usando tablas de logaritmos base 10. Por ejemplo, para encontrar $37.678 \cdot 127.75$, buscaban $\log 37.678$ y $\log 127.75$, y sumaban esos números. Luego, procedían hacia atrás para encontrar el **antilog,** o antilogaritmo, de la suma. El *antilog* de un número es 10 elevado a ese número. Por ejemplo, el antilog de 3 es 10^3, ó 1000.

Investigación: Regla de cálculo

En esta investigación, explorarás las propiedades de los logaritmos. Necesitas una hoja de trabajo para una regla de cálculo (*slide rule*) y dos reglas.

Completa la investigación. Luego, compara tus resultados con los siguientes.

Paso 1 $x = 0.3$, $y = 0.7$, $z = 0.9$, $w = 1.0$

Paso 2

a. $\frac{x}{w} = \frac{0.3}{1.0} = 0.3$

b. $\frac{y}{w} = \frac{0.7}{1.0} = 0.7$

c. $\frac{y}{x} = \frac{0.7}{0.3} \approx 2.3$

d. $\frac{z}{x} = \frac{0.9}{0.3} \approx 3.0$

Paso 3

a. $\log_{10} 2 = \frac{\log 2}{\log 10} = \frac{x}{w} = 0.3$ ó $\log_{10} 2 = x = 0.3$

b. $\log_{10} 5 = \frac{\log 5}{\log 10} = \frac{y}{w} = 0.7$ ó $\log_{10} 5 = y = 0.7$

c. $\log_2 5 = \frac{\log 5}{\log 2} = \frac{y}{x} \approx 2.3$

d. $\log_2 8 = \frac{\log 8}{\log 2} = \frac{z}{x} = 3.0$

(continúa)

Lección 5.7 • Propiedades de logaritmos (continuación)

Paso 4 Para formar una escala logarítmica para una regla de cálculo, coloca una regla sin escalas debajo de una escala lineal que vaya de 0 a 1. Debes rotular la regla de cálculo de modo que cada número se alinee con su logaritmo en la escala lineal. Ya que $\log 1 = 0$, haz una marca en la regla de cálculo directamente debajo del 0 de la escala lineal y rotúlala con el número 1. $\text{Log}\, 2 \approx 0.30$, así que haz una marca en la escala de la regla de cálculo directamente debajo de 0.30 de la escala lineal y rotúlala con el número 2. $\text{Log}\, 3 \approx 0.48$, así que haz una marca debajo de 0.48 y rotúlala con el número 3. Continúa hasta que hayas escrito 10 debajo de 1 de la escala lineal (puesto que $\log 10 = 1$). Para construir una escala más precisa, agrega marcas para los múltiplos de 0.5 ó de 0.1.

Paso 5 Cuando "sumas" 2 y 3 en una regla de cálculo, obtienes 6, el producto de 2 y 3. Esto es así porque en realidad estás sumando los logaritmos comunes de los números, que son los exponentes a los cuales hay que elevar 10 para obtener los números. La regla de la multiplicación de los exponentes dice que multiplicas dos números con la misma base sumando sus exponentes.

Paso 6

a. Coloca 1 encima de 3. Mira debajo de 3 en la regla superior. El resultado será 9.

b. Si colocas 1 encima de 5, no podrás encontrar el producto porque 7 se saldrá más allá del límite de la regla de cálculo. Sin embargo, puedes extender tu regla de cálculo hacia ambos lados. Una longitud de una regla de cálculo hacia la derecha representa 100. La respuesta es 35.

c. Coloca un 1 encima de 2.5. Mira debajo de 3.5 en la regla superior. El resultado es 8.75. Esto muestra que $2.5 \cdot 3.5 = 8.75$.

d. Se sabe de la parte c que $2.5 \cdot 3.5 = 8.75$. Dado que $25 = 10 \cdot 2.5$ y $35 = 10 \cdot 3.5$, se concluye que $25 \cdot 35 = 100 \cdot 8.75 = 875$. (También podrías extender ambas reglas de cálculo, pero te costaría más trabajo.)

Paso 7 El logaritmo del producto de dos números es la suma de los logaritmos de los dos números, de modo que sumas las longitudes logarítmicas en una regla de cálculo para multiplicar los números que las longitudes representan.

Paso 8 Obtienes 4, que es $8 \div 2$.

Paso 9

a. Coloca 2 encima de 10. Lee el número debajo de 1, que es 5.

b. Coloca 3.5 encima de 2.5. Necesitarás extender la regla de cálculo inferior hacia la izquierda para leer el número que aparece debajo de 1, que es aproximadamente 0.71.

c. El mismo método y la misma respuesta que en la parte b.

d. Extiende la regla inferior hacia la derecha. Coloca 5 encima de 18 y lee el número debajo de 1, que es 3.6.

Paso 10 El logaritmo del cociente de dos números es la diferencia de los logaritmos de los dos números, así que restas las longitudes logarítmicas en una regla de cálculo para dividir los números que las longitudes representan.

Las propiedades de los exponentes y de los logaritmos se resumen en la página 282 de tu libro. Léelas atentamente.

LECCIÓN CONDENSADA

5.8 Aplicaciones de los logaritmos

En esta lección

- Usarás logaritmos para resolver unos problemas reales que se pueden modelar con ecuaciones exponenciales
- Usarás una técnica que se llama la **rectificación de curvas** para determinar si una relación es exponencial

En esta lección, usarás lo que has aprendido sobre los logaritmos y sus propiedades para resolver algunos problemas. Primero, trabaja el Ejemplo A en tu libro. El quinto paso de esa solución implica sacar el logaritmo de ambos lados de la ecuación. Es importante recordar que para sacar el logaritmo de ambos lados, hay que saber que el valor de cada lado es positivo. (La función del logaritmo no se define para cero ni para los valores negativos.)

El ejemplo siguiente te muestra cómo resolver el Ejercicio 5c en tu libro. Intenta resolver el problema por tu cuenta, antes de mirar la solución.

EJEMPLO La ecuación $f(x) = \frac{12000}{1 + 499(1.09)^{-x}}$ da las ventas totales x días después del lanzamiento de un nuevo juego de video. ¿En cúal día se vendieron 6000 juegos?

► ***Solución*** Sustituye $f(x)$ por 6000 y resuelve.

$6000 = \frac{12000}{1 + 499(1.09)^{-x}}$	Ecuación original.
$6000\left(1 + 499(1.09)^{-x}\right) = 12000$	Multiplica ambos lados por $1 + 499(1.09)^{-x}$.
$499\left(1.09^{-x}\right) = 1$	Divide ambos lados entre 6000 y luego resta 1 de ambos lados.
$1.09^{-x} = \frac{1}{499}$	Divide ambos lados entre 499.
$-x(\log 1.09) = \log\left(\frac{1}{499}\right)$	Saca el logaritmo de ambos lados.
$x = -\frac{1}{\log 1.09} \cdot \log\left(\frac{1}{499}\right)$	Multiplica ambos lados por $-\frac{1}{\log 1.09}$.
$x \approx 72.1$	Evalúa con una calculadora.

Seis mil juegos se vendieron 72 días después del lanzamiento.

El Ejemplo B en tu libro ilustra una técnica que se llama la **rectificación de curvas.** Trabaja este ejemplo, usando papel y lápiz. La rectificación de curvas también se usa en la investigación.

(continúa)

Investigación: Enfriamiento

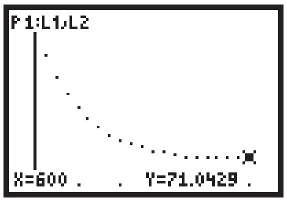
Paso 1 Lee el Paso 1 de la investigación en tu libro. Si tienes acceso a un sensor de temperatura, puedes reunir tus propios datos. Si no lo tienes, utiliza la siguiente muestra de datos.

Paso 2 Sea t el tiempo en segundos y sea p la temperatura del sensor en °F. Dibuja una gráfica de cómo supones que será el comportamiento de los datos (t, p).

Paso 3 Completa el Paso 3 en tu libro. A continuación se presentan una tabla y una gráfica de algunos datos de muestra.

Tiempo (s) t	Temperatura (°F) p
0	89.8143
30	86.7953
60	83.2372
90	80.7256
120	78.7182
150	77.0818
180	75.9116
210	74.7286
240	73.8714
270	73.1955
300	72.7045

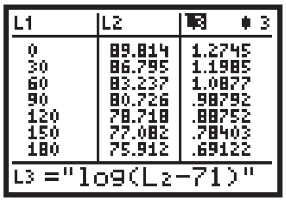
Tiempo (s) t	Temperatura (°F) p
330	72.2136
360	71.8864
390	71.5571
420	71.3857
450	71.2143
480	71.2143
510	71.2143
540	71.2143
570	71.0429
600	71.0429

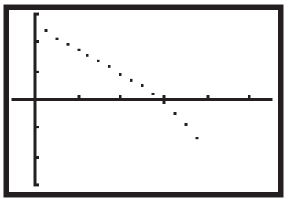


[−60, 660, 120, 67, 93, 50]

La gráfica muestra un deterioro exponencial, y el límite parece ser 71°. Si 71° es el límite, entonces una ecuación de la forma $p = 71 + at^x$, ó $p - 71 = ab^t$, modelará los datos. Al tomar el log de ambos lados, se obtiene $\log(p - 71) = \log a + t \cdot \log b$, que es una ecuación lineal. Entonces, si el límite es 71°, la gráfica de $\log(p - 71)$ será lineal.

Paso 4 Resta 71° de cada temperatura y grafica $(t, \log(p - 71))$. Si eliminas los valores repetidos al final del conjunto de datos, obtendrás la gráfica siguiente, que parece ser lineal. Por tanto, 71° es el límite.





[−60, 660, 120, −1.5, 1.5, 0.5]

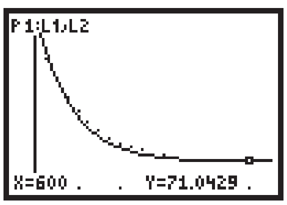
(continúa)

Lección 5.8 • Aplicaciones de los logaritmos (continuación)

Paso 5 Ahora necesitas encontrar una ecuación que modele los datos. Usa la recta mediana-mediana.

$y = -0.004x + 1.364$	Recta mediana-mediana para los datos de $(t, \log(p - 71))$.
$\log(p - 71) = -0.004t + 1.364$	Sustituye y por $\log(p - 71)$ y x por t.
$p - 71 = 10^{-0.004t+1.364}$	Definición de logaritmo.
$p = 10^{-0.004t+1.364} + 71$	Suma 71 a ambos lados.
$p = 10^{-0.004t} \cdot 10^{1.364} + 71$	Propiedad de multiplicación de los exponentes.
$p \approx 10^{-0.004t} \cdot 23.12 + 71$	Evalúa $10^{1.364}$.
$p \approx \left(10^{-0.004}\right)^t \cdot 23.12 + 71$	Propiedad de las potencias de los exponentes.
$p \approx 0.99^t \cdot 23.12 + 71$	Evalúa $10^{-0.004}$.
$p \approx 71 + 23.12(0.99)^t$	Reescribe de la forma $y = k + ab^x$.

Puedes usar una calculadora graficadora para verificar el ajuste.



[−60, 660, 120, 67, 93, 50]