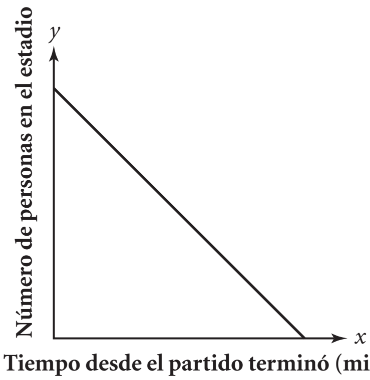
LECCIÓN CONDENSADA

4.1 Interpretación de gráficas

En esta lección

- Interpretarás unas gráficas que muestran información sobre situaciones reales
- Harás una gráfica que refleje la información contenida en una historia
- Inventarás una historia que contenga la información de una gráfica

Una gráfica puede comunicar mucha información de una manera concisa. Esta gráfica muestra la relación entre el número de personas dentro de un estadio de béisbol y el tiempo transcurrido desde que el partido terminó.



El número de personas depende del tiempo transcurrido desde que el partido terminó. Así pues, el tiempo en minutos es la variable independiente y el número de personas es la variable dependiente.

Al incrementarse el tiempo, el número de personas disminuye linealmente, indicando que las personas abandonan el estadio a una velocidad constante. La pendiente es el número de personas que se van cada minuto. La intersección x representa el momento cuando el estadio queda vacío. La intersección y representa el número de personas dentro del estadio cuando el partido finaliza.

El ejemplo en tu libro muestra una gráfica más complicada que indica cómo varía el número de latas contenidas en una máquina de refrescos en el transcurso de un típico día escolar. Estudia la gráfica atentamente durante unos cuantos minutos, pensando en lo que podría ocasionar cada incremento, disminución, y cambio en la pendiente. Después trabaja el ejemplo, respondiendo las preguntas por tu cuenta, antes de leer las soluciones.

El texto que sigue el ejemplo plantea otras varias preguntas respecto a la gráfica. Intenta responder cada pregunta por tu cuenta, y después lee las respuestas siguientes.

- *¿A qué hora llegan los estudiantes a la escuela?* La máquina está llena hasta las 7 A.M. y después el número de latas disminuye con bastante rapidez. Esto indica que es probable que los estudiantes comiencen a llegar alrededor de las 7 A.M.
- *¿A qué hora comienzan las clases?* El número de latas empieza a disminuir a una velocidad menor a partir de las 8 A.M. Ésta podría ser la hora en que las clases comiencen.

(continúa)

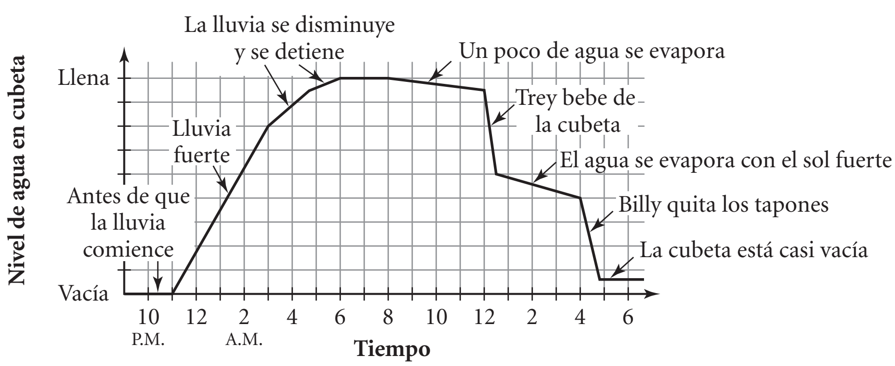
Lección 4.1 • Interpretación de gráficas (continuación)

- *¿A qué hora es el almuerzo?* Lo más probable es que el almuerzo empiece alrededor de las 11:15 A.M. A partir de esta hora el número de latas disminuye con mucha rapidez. Esto probablemente se deba a que los estudiantes y los profesores compran los refrescos para acompañar su almuerzo.
- *¿A qué hora terminan las clases?* El número de latas de la máquina empieza a disminuir rápidamente alrededor de las 3 P.M. Ésta es la hora más probable en que las clases terminen.

Observa que tanto la gráfica del estadio de béisbol como la de la máquina de refrescos son continuas. En realidad, el número de personas dentro del estadio y el número de refrescos en la máquina deben ser valores discretos. Sin embargo, un “bosquejo de gráfica” continuo facilita ver las tendencias y los patrones.

Investigación: Graficar una historia

Lee la historia de la Parte 1 de la investigación en tu libro, y después bosqueja una gráfica que refleje toda la información de la historia. Cuando termines, compara tu gráfica con la gráfica siguiente, que ha sido rotulada para que muestre cómo se relacionan las diversas secciones con la historia.



Ahora observa la gráfica de la Parte 2 de la investigación. Piensa cuidadosamente en la información mostrada en la gráfica. Después escribe una historia que contenga toda la información, incluyendo cuándo y cuánto se incrementan o disminuyen las razones de cambio. A continuación se muestra una posible historia, pero debes escribir la tuya antes de leerla.

“Luis y Loretta tienen una pequeña piscina al aire libre. Los niños quieren entrar a la piscina, pero el nivel del agua es muy bajo, así que Luis abre la manguera y comienza a llenar la piscina a una velocidad constante. Los niños están impacientes y se meten a la piscina y comienzan a salpicar agua fuera de ésta. La piscina se va llenando a una velocidad constante, pero menor que la anterior. Cuando la piscina está completamente llena, Luis cierra la manguera y los niños tratan de no sacar más agua de la piscina. Después de que los niños salen de la piscina, Luis la vacía. Al principio el agua sale rápidamente, y después lo hace cada vez más lentamente, al ir disminuyendo la cantidad de agua restante. Luis deja sólo un poco de agua en el fondo, que se evaporará lentamente.”

LECCIÓN CONDENSADA

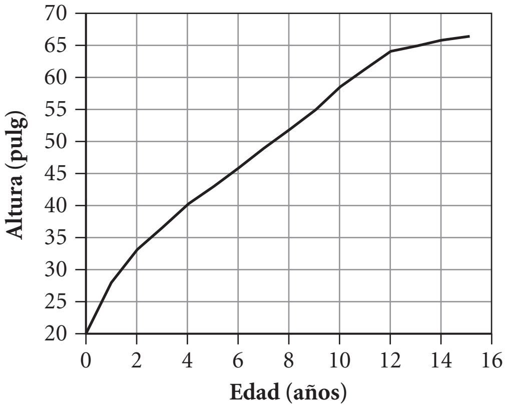
4.2 Notación de funciones

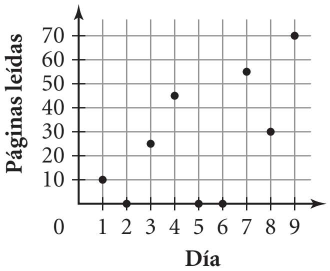
En esta lección

- Revisarás la **notación de funciones**
- Determinarás si una **relación** es una **función,** basándote en su gráfica
- Encontrarás valores de funciones usando gráficas y ecuaciones

Una **relación** es cualquier correlación entre dos variables. Una **función** es un tipo especial de relación en la que, para cada valor de la variable independiente, existe no más que un valor de la variable dependiente. Si x es la variable independiente y y es la variable dependiente, entonces en una función hay no más que un valor y relacionado a cada valor x.

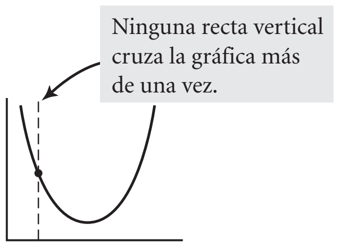
La gráfica abajo a la izquierda muestra cómo cambió la altura de Rachel a medida que ella creció. La gráfica a la derecha muestra el número de páginas de una novela que Tom leyó diariamente durante 9 días. La gráfica a la izquierda es continua, mientras que la gráfica a la derecha se compone por puntos discretos.





Las dos relaciones mostradas son funciones: Rachel tenía una sola altura en un momento dado de su vida, y Tom leyó sólo un número de páginas en cualquier día determinado. Se puede decir que la altura de Rachel es una función de su edad y que el número de páginas que Tom leyó es una función del día.

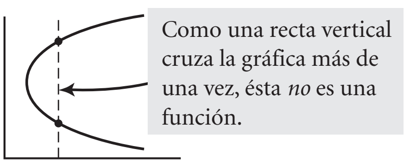
En algunos casos existe una fórmula matemática que conecta las dos variables de una función, pero en otros casos no la hay. Por ejemplo, no hay una fórmula que conecte el día con el número de páginas que Tom leyó.



Función

Probablemente ya conoces la prueba de la recta vertical, que te ayuda a determinar si una gráfica representa una función o no. Si ninguna recta vertical cruza la gráfica más de una vez, entonces la relación es una función.

Usa la prueba de la recta vertical para verificar si las gráficas de la altura de Rachel y el número de páginas que Tom leyó son funciones.



No función

La **notación de función** pone énfasis en la relación dependiente entre las variables usadas en una función. La notación $y = f(x)$ indica que los valores de la variable dependiente, y, se definen explícitamente en términos de la variable independiente, x, mediante la función f.

(continúa)

Lección 4.2 • Notación de funciones (continuación)

Con el ejemplo en tu libro, puedes practicar el uso de la notación de función y la búsqueda de valores de funciones usando ecuaciones y gráficas. Trabaja el ejemplo, resolviendo los problemas por tu cuenta antes de leer la solución.

Investigación: Ser o no ser (una función)

Completa la investigación en tu libro y después lee las soluciones siguientes.

Paso 1

a. La gráfica pasa la prueba de la recta vertical, lo que indica que existe no más que un valor y para cada valor x. Así pues, la relación es una función.

b. Puedes dibujar una recta vertical que interseque a la gráfica en dos puntos, y por tanto la relación no es una función.

c. La gráfica pasa la prueba de la recta vertical, así que la relación es una función.

d. Esta relación hace coincidir cada valor x con exactamente un valor y, así que es una función.

e. Esta relación hace coincidir cada valor x con un solo valor y, así que es una función. (Observa que, como en este ejemplo, una función puede hacer coincidir el mismo valor y con más de un valor x. Piensa en la recta horizontal $y = 2$, por ejemplo. Es una función (pasa la prueba de la recta vertical) y sin embargo, hace coincidir el valor y 2 con *todos* los valores x.)

f. Esta relación hace coincidir el valor x 1 con dos valores y, 1 y 3. También hace coincidir el valor x 3 con dos valores y, 2 y 4. No es una función.

g. Hay estudiantes de la misma edad que tienen alturas diferentes. Esto significa que un valor de edad coincide con más de un valor de altura. Por lo tanto, la relación *no* es una función.

h. Como cada automóvil debe tener un número de placa que es único, la relación es una función.

i. La respuesta depende de la forma en que miras la situación. Si consideras solamente los días de un año en un lugar, entonces la relación es una función porque el sol se pone a una hora determinada cada día. Si consideras el mismo día de cualquier año, o si consideras distintos lugares, entonces en el mismo día el sol se pone a diferentes horas, de manera que la relación no es una función.

Paso 2 Únicamente se dan las respuestas de las relaciones que son funciones.

a. Cuando $x = 2$, $y = 2$, así que $a(2) = 2$. Cuando $y = 3$, $x = 0$, así que $a(0) = 3$, ó $a(1.5) = 3$.

b. La gráfica no tiene ningún punto correspondiente a $x = 2$, así que $c(2) =$ indefinido; $c(1) = 3$, ó $c(3) = 3$.

c. $d(2) = 3$

d. $e(2) = 2$; ningún valor x resulta en $y = 3$

LECCIÓN CONDENSADA

4.3 Rectas en movimiento

En esta lección

- Explorarás lo que le sucede a la ecuación de una recta cuando **trasladas** la recta
- Aprenderás a escribir una ecuación que traslade una función h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente
- Describirás la gráfica de una ecuación de la forma $y = k + f(x - h)$, relacionándola con la gráfica de $y = f(x)$

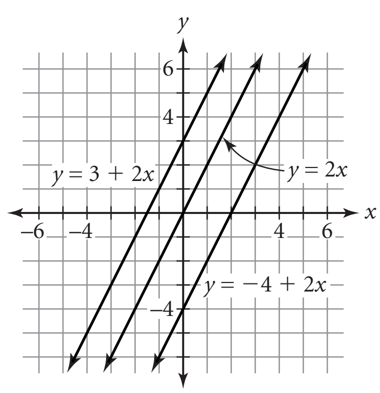
Con la excepción de las rectas verticales, las rectas representan funciones. A continuación se escriben la forma de intersección y y la forma punto-pendiente de una recta, en notación de función.

	Forma *x-y*	**Notación de función**
Forma de intersección *y*	$y = a + bx$	$f(x) = a + bx$
Forma punto-pendiente	$y = y_1 + b(x - x_1)$	$f(x) = f(x_1) = b(x - x_1)$

En la investigación, verás de qué manera trasladar una recta—es decir, moverla horizontalmente o verticalmente—afecta su ecuación.

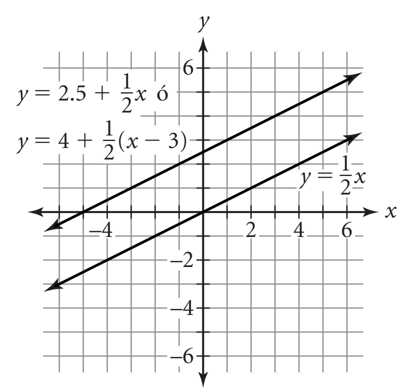
Investigación: Dando vueltas

Completa los Pasos 1–5 por tu cuenta, y después lee los resultados siguientes.



Pasos 1 y 2 Las rectas se muestran a la derecha. La ecuación para la recta que se encuentra 3 unidades encima de $y = 2x$ es $y = 3 + 2x$. La ecuación para la recta que se encuentra 4 unidades debajo de $y = 2x$ es $y = -4 + 2x$.

Paso 3 Las gráficas de ambas rectas se muestran abajo a la derecha. La nueva recta tiene pendiente $\frac{1}{2}$ y pasa por el punto (3, 4), así que su ecuación en la forma punto-pendiente es $y = 4 + \frac{1}{2}(x - 3)$. Puedes volver a escribir esto en forma de intersección y como $y = 2.5 + \frac{1}{2}x$.



Paso 4 Si mueves cada punto a lo largo de $f(x) = \frac{1}{2}x$ 1 unidad hacia arriba y 2 unidades a la derecha, el origen se mueve a (2, 1). La pendiente de la recta no cambia. Por lo tanto, la ecuación de la nueva recta en la forma punto-pendiente sería $y = 1 + \frac{1}{2}(x - 2)$. Si vuelves a escribir esta ecuación en la forma de intersección y obtendrás $y = \frac{1}{2}x$, que es igual a la ecuación original.

Paso 5 Cuando trasladas una recta con una ecuación de la forma $y = ax$, se resta de x el número de unidades que se mueven horizontalmente, y se suma al lado derecho de la ecuación el número de unidades que se mueven verticalmente. (*Observación:* Si se mueve a la izquierda, el número restado de x es negativo; si se mueve hacia abajo, el número sumado al lado derecho de la ecuación es negativo.)

(continúa)

Lee el resto de la investigación, hasta el Paso 9 en tu libro. Es probable que no cuentes con las suficientes personas o con los materiales necesario para llevar a cabo el experimento por tu cuenta, pero trata de imaginar lo que sucedería. Ve si puedes responder las preguntas del Paso 9, y después lee los resultados siguientes.

a. La gráfica de B se traslada 2 unidades a la izquierda y ligeramente hacia arriba (dependiendo de la distancia entre B y A) de la gráfica de A.

b. Si supones que B se encuentra 1 unidad detrás de A, entonces la ecuación para la gráfica de B es $y = f(x + 2) + 1$. Esto indica que ésta es la gráfica de $y = f(x)$ corrida 2 unidades a la izquierda (para compensar por el retraso de 2 segundos) y 1 unidad hacia arriba (porque las distancias que registra B son 1 unidad mayores que las registradas por A).

c. $y = f(x - h) + k$

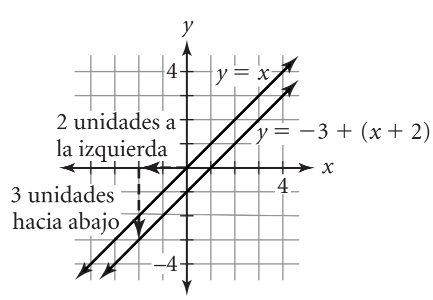
Puedes generalizar tus hallazgos de la investigación a cualquier función. Por ejemplo, independientemente de cuál sea la forma de la función $y = f(x)$, la gráfica de $y = f(x - 3) + 2$ se verá igual que la gráfica de $y = f(x)$, pero se trasladará 2 unidades hacia arriba y 3 unidades a la derecha. Lee el recuadro "Translation of a Function" (Traslación de una función) en la página 188 de tu libro. Puedes usar tu calculadora para verificar el texto del recuadro. Por ejemplo, grafica $y = x^3$, y después $y = (x - 4)^3 + 1$. La gráfica de la segunda función debe verse como la gráfica de la primera función corrida 4 unidades a la derecha y 1 unidad hacia arriba.

Si una función se traslada h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente, entonces el punto (x, y) se transforma en un nuevo punto, $(x + h, y + k)$. Este nuevo punto es la **imagen** del punto original.

En tu libro, lee el ejemplo y el párrafo que le sigue, y después lee el siguiente ejemplo.

EJEMPLO Describe cómo la gráfica de $f(x) = -3 + (x + 2)$ es una traslación de la gráfica de $f(x) = x$.

► ***Solución*** La gráfica de $f(x) = -3 + (x + 2)$ pasa por $(-2, -3)$. Considera este punto como la imagen trasladada de $(0, 0)$ sobre $f(x) = x$. Se ha trasladado 2 unidades a la izquierda y 3 unidades hacia abajo desde su ubicación original, así que la gráfica de $f(x) = -3 + (x + 2)$ es simplemente la gráfica de $f(x) = x$ trasladada 2 unidades a la izquierda y 3 unidades hacia abajo.



Observa que la gráfica de $f(x) = -3 + (x + 2)$ en el ejemplo anterior también es la gráfica de $f(x) = x - 1$. Por lo tanto, trasladar $f(x)$ 2 unidades a la izquierda y 3 unidades hacia abajo es equivalente a trasladarla 1 unidad hacia abajo. Lee atentamente el resto de la lección. Allí se explica que existe un número infinito de traslaciones que transforman una recta en otra recta paralela.

LECCIÓN CONDENSADA

4.4 Traslaciones y la familia cuadrática

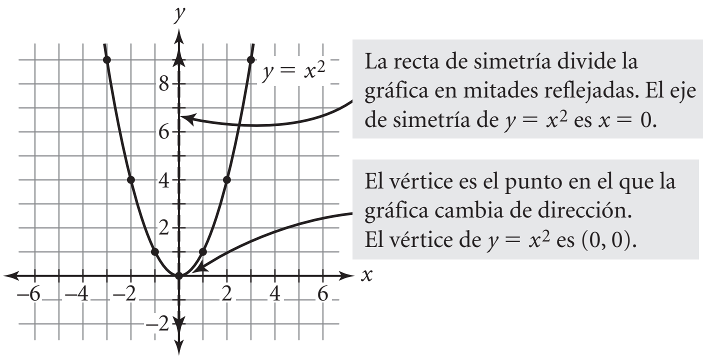
En esta lección

- Examinarás la gráfica de $y = x^2$, que es una **parábola**
- Encontrarás ecuaciones para las **traslaciones** de la gráfica $y = x^2$
- Verás una aplicación sencilla de una función cuadrática

En la lección anterior, exploraste las traslaciones de funciones lineales. Lee el texto en la página 193 de tu libro, en el que se dan ejemplos de cómo ocurren las traslaciones en otras situaciones.

Una traslación es un tipo de transformación. Una **transformación** es un cambio en el tamaño o la posición de una figura. Tal vez en cursos anteriores de matemáticas hayas aprendido de otras transformaciones, como las reflexiones, las dilataciones, y las rotaciones.

La forma de la gráfica para la función $y = x^2$ se llama una **parábola.** Las parábolas siempre tienen un **eje de simetría** que pasa por el **vértice.**



La función $y = x^2$ es una **función madre.** Al transformar la gráfica de esta función, puedes crear una **familia de funciones,** que consiste en un número infinito de funciones relacionadas. La función $y = x^2$ y todas las funciones creadas al transformarla se llaman **funciones cuadráticas.** Como verás a lo largo de este curso, las funciones cuadráticas son muy útiles. A continuación se muestran tres ejemplos de funciones cuadráticas.

$y = x^2 - 3$ $\qquad$ $y = (x + 12)^2$ $\qquad$ $y = 5 - (x + 4)^2$

Investigación: Grafícame

Paso 1 Cada parte rotulada con una letra del Paso 1 muestra la gráfica de $y = x^2$ y una gráfica creada al trasladar la gráfica de $y = x^2$. Tu trabajo consiste en encontrar la ecuación que produce la gráfica trasladada. Para ayudarte a encontrar la ecuación, piensa en lo que aprendiste sobre las funciones lineales trasladadas en la lección anterior.

Cuando consideres que conoces la ecuación de la gráfica, verifícala graficando ésta y $y = x^2$ en la misma ventana de la calculadora. (Asegúrate de leer acerca de las ventanas amistosas en **Calculator Note 4C.**) Completa el Paso 1 por tu cuenta, antes de leer los resultados siguientes.

(continúa)

Lección 4.4 • Traslaciones y la familia cuadrática (continuación)

a. La parábola roja es la gráfica de $y = x^2$ trasladada 4 unidades hacia abajo, así que su ecuación es $y = x^2 - 4$.

b. La parábola roja es la gráfica de $y = x^2$ trasladada 1 unidad hacia arriba, así que su ecuación es $y = x^2 + 1$.

c. La parábola roja es la gráfica de $y = x^2$ trasladada 2 unidades a la derecha, así que su ecuación es $y = (x - 2)^2$.

d. La parábola roja es la gráfica de $y = x^2$ trasladada 4 unidades a la izquierda, así que su ecuación es $y = (x + 4)^2$.

e. La parábola roja es la gráfica de $y = x^2$ trasladada 2 unidades a la izquierda y 2 unidades hacia arriba, así que su ecuación es $y = (x + 2)^2 + 2$.

f. La parábola roja es la gráfica de $y = x^2$ trasladada 4 unidades a la derecha y 2 unidades hacia abajo, así que su ecuación es $y = (x - 4)^2 - 2$.

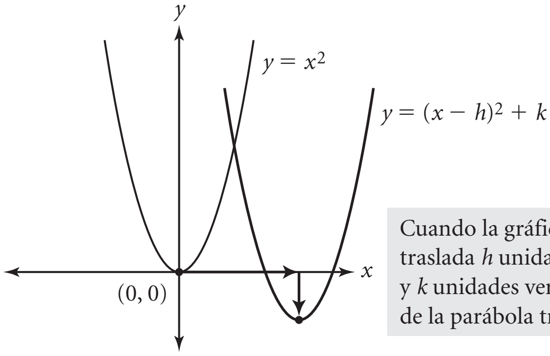
Paso 2 Para una traslación a la derecha, restas el número de unidades de x. Para una traslación a la izquierda, sumas el número de unidades a x. Para una traslación hacia arriba, sumas el número de unidades al lado derecho de la ecuación (o lo restas de y). Para una traslación hacia abajo, restas el número de unidades del lado derecho de la ecuación (o lo sumas a y). Las coordenadas del vértice de la parábola trasladada son (*valor de la traslación horizontal, valor de la traslación vertical*).

Paso 3 En general, si la gráfica de $y = x^2$ se traslada h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente, entonces la ecuación de la gráfica trasladada es $y = (x - h)^2 + k$, ó $y - k = (x - h)^2$.

El ejemplo en tu libro muestra una aplicación que implica unas traslaciones de parábolas. Lee el ejemplo y la solución atentamente, siguiéndolo con papel y lápiz. Para comprobar tu comprensión, resuelve el mismo problema, pero haz que el buzo se sumerja desde una tabla de 15 pies de largo que está a 20 pies encima del agua. (La función para la nueva gráfica sería $y = f(x - 10) - 5$ y la altura máxima del buzo sería de 20 pies.)

Has visto que las traslaciones de las funciones cuadráticas trabajan de manera muy parecida a las traslaciones de las funciones lineales. Si trasladas la gráfica de $y = x^2$ h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente, entonces la ecuación de la parábola trasladada es $y = (x - h)^2 + k$. También puedes escribir esta ecuación como $y = k + (x - h)^2$ ó $y - k = (x - h)^2$. Cuando trasladas h unidades horizontalmente, es igual que reemplazar x en la ecuación con $(x - h)$. De igual forma, una traslación vertical de k unidades reemplaza y con $(y - k)$.

Observa que el vértice de la parábola trasladada es (h, k). Ésta es la razón por la cual encontrar el vértice es fundamental para determinar las traslaciones de parábolas.



Cuando la gráfica de $y = x^2$ se traslada h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente, el vértice de la parábola trasladada es (h, k).

LECCIÓN CONDENSADA

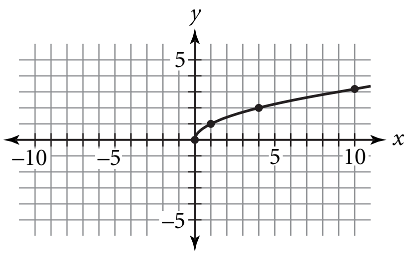
4.5

Reflexiones y la familia de raíces cuadradas

En esta lección

- Conocerás la **función raíz cuadrada** y su gráfica
- **Reflejarás** funciones sobre el eje x y el eje y

A la derecha se presenta la gráfica de la función raíz cuadrada, $y = \sqrt{x}$. El dominio de la función es $x \geq 0$ y el rango es $y \geq 0$.



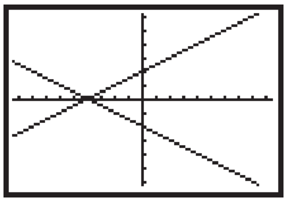
Grafica la función raíz cuadrada en tu calculadora y rastrea la gráfica para encontrar $\sqrt{3}$, $\sqrt{8}$, y $\sqrt{31}$. Debes obtener aproximadamente 1.732, aproximadamente 2.828, y aproximadamente 5.568, respectivamente. Si intentas rastrear para los valores de $x < 0$, la calculadora no da ningún valor para y. Esto se debe a que la función no está definida para los valores x negativos (es decir, no puedes tomar la raíz cuadrada de un número negativo).

Investigación: Tómate un momento para reflejar

En esta investigación, explorarás un tipo de transformación que se llama **reflexión.** Aplicarás las reflexiones a las funciones lineales, cuadráticas, y de raíces cuadradas.

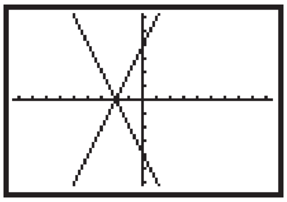
Paso 1 Trabaja en el Paso 1 de tu libro, por tu cuenta. Cuando termines, compara tus resultados con los siguientes.

a. $Y_2 = -(0.5x + 2) = -0.5x - 2$. La gráfica de Y_2 se ve igual que la gráfica de Y_1 doblada sobre el eje x. En otras palabras, la gráfica de Y_2 es la reflexión de la gráfica de Y_1 sobre el eje x.



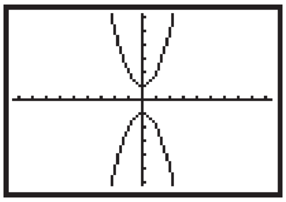
$[-9.4, 9.4, 1, -6.2, 6.2, 1]$

b. $Y_2 = -(-2x - 4) = 2x + 4$. La gráfica de Y_2 es la reflexión de la gráfica de Y_1 sobre el eje x.



$[-9.4, 9.4, 1, -6.2, 6.2, 1]$

c. $Y_2 = -\left(x^2 + 1\right) = -x^2 - 1$. La gráfica de Y_2 es la reflexión de la gráfica de Y_1 sobre el eje x.

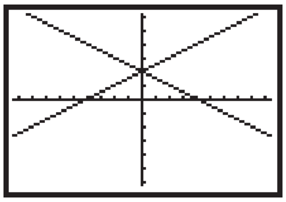


$[-9.4, 9.4, 1, -6.2, 6.2, 1]$

d. En general, la gráfica de $y = -f(x)$ es la reflexión de la gráfica de $y = f(x)$ sobre el eje x.

Paso 2 Trabaja en el Paso 2 por tu cuenta, y después compara tus resultados con los siguientes.

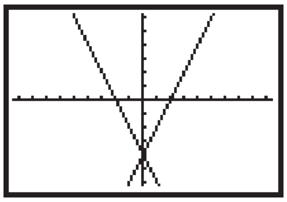
a. $Y_2 = 0.5(-x) + 2 = -0.5x + 2$. La gráfica de Y_2 es la reflexión de la gráfica de Y_1 sobre el eje y.



$[-9.4, 9.4, 1, -6.2, 6.2, 1]$

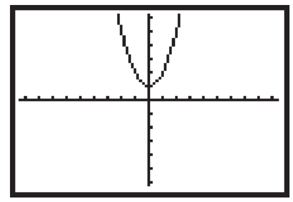
(continúa)

b. $Y_2 = -2(-x) - 4 = 2x - 4$. La gráfica de Y_2 es la reflexión de la gráfica de Y_1 sobre el eje y.



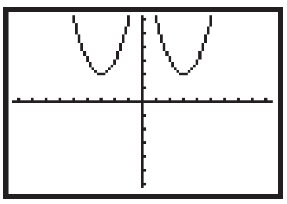
$[-9.4, 9.4, 1, -6.2, 6.2, 1]$

c. $Y_2 = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1$. La gráfica de Y_2 es igual que la gráfica de Y_1 porque la gráfica original tiene el eje y como un eje de simetría, de manera que una reflexión sobre el eje y proyecta la gráfica sobre sí misma.



$[-9.4, 9.4, 1, -6.2, 6.2, 1]$

d. $Y_2 = (-x - 3)^2 + 2$. La gráfica de Y_2 es la reflexión de la gráfica de Y_1 sobre el eje y.

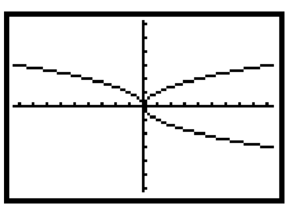


$[-9.4, 9.4, 1, -6.2, 6.2, 1]$

e. La gráfica de $y = f(-x)$ es la reflexión de la gráfica de $y = f(x)$ sobre el eje y.

Paso 3 Trabaja en el Paso 3 por tu cuenta, y después compara tus resultados con los siguientes.

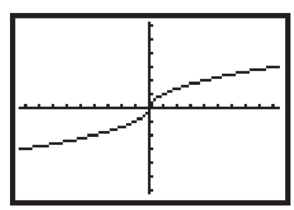
a. La gráfica de $Y_2 = -Y_1(x) = -\sqrt{x}$ es una reflexión de la gráfica de la función raíz cuadrada sobre el eje x. La gráfica de $Y_2 = Y_1(-x) = \sqrt{-x}$ es una reflexión de la función raíz cuadrada sobre el eje de las y.



$[-9.4, 9.4, 1, -6.2, 6.2, 1]$

b. La gráfica de $Y_2 = -Y_1(-x) = -\sqrt{-x}$ es una reflexión de la gráfica de la función raíz cuadrada sobre ambos ejes.

c. La gráfica de $y = \sqrt{x}$ no es una parábola horizontal completa, porque tiene un rango de $y \geq 0$. Graficar $y = -\sqrt{x}$ completaría la mitad inferior de la parábola.



$[-9.4, 9.4, 1, -6.2, 6.2, 1]$

En el recuadro "Reflection of a Function" (Reflexión de una función), se resume lo que has descubierto en la investigación. Lee el texto de ese recuadro y después lee el resto de la lección.

LECCIÓN CONDENSADA

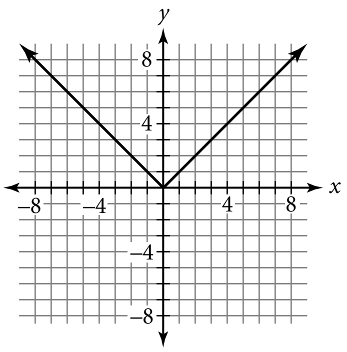
4.6

Estiramiento y encogimiento y la familia del valor absoluto

En esta lección

- Graficarás la **función del valor absoluto** y transformaciones de la función del valor absoluto
- Graficarás un **estiramiento** o un **encogimiento** de una función madre y observarás cómo estas transformaciones se relacionan con la ecuación de la función madre
- Usarás lo que sabes sobre transformaciones para ajustar una función a los datos

Lee la página 209 de tu libro para repasar el concepto de valor absoluto. Mira la gráfica de la función madre del valor absoluto, $y = |x|$.



Observa que la mitad derecha de la gráfica se ve como $y = x$, mientras que la mitad izquierda de la gráfica se ve como $y = -x$. Esto tiene sentido porque cuando $x \geq 0$, $|x| = x$, y cuando $x < 0$, $|x| = -x$.

El Ejemplo A muestra tres ejemplos de transformaciones de la función $y = |x|$. Todas las transformaciones son **estiramientos.** Lee el ejemplo atentamente. Observa que puedes obtener la función de la parte a sustituyendo y por $\frac{y}{2}$ en la función madre, $y = |x|$.

Sustituir y por $\frac{y}{a}$ en la función madre estira (si $a > 1$) o **encoge** (si $0 < a < 1$) la gráfica de la función madre *verticalmente* por un factor de a.

De manera similar, como puedes observar en la parte b, sustituir x por $\frac{x}{b}$ en la función madre estira (si $b > 1$), o encoge (si $0 < b < 1$) la gráfica de la función madre *horizontalmente* por un factor de b.

Las traslaciones y reflexiones son **transformaciones rígidas,** lo que significa que producen imágenes que son congruentes con la figura original. En contraste, los estiramientos y encogimientos son **transformaciones no rígidas,** lo que significa que producen imágenes que *no* son congruentes con la figura original. Observa que si estiras o encoges una figura por un **factor** igual, tanto vertical como horizontalmente, la imagen será similar al original.

El Ejemplo B de tu libro muestra cómo a veces puedes usar lo que has aprendido sobre las traslaciones, las reflexiones, y los estiramientos para ajustar las funciones a los datos. Lee el Ejemplo B atentamente, siguiéndolo con papel y lápiz. Observa que suponemos que el punto (1.14, 0.18) es la imagen del punto (1, 1) en la parábola madre. Podríamos haber supuesto que (1.14, 0.18) fuera la imagen de *cualquier* punto de la parábola madre excepto (0, 0). Elegimos el punto (1, 1) porque conduce a unos cálculos de factor de escala que son bastante sencillos.

(continúa)

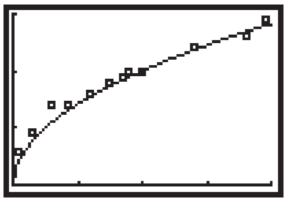
Investigación: El péndulo

Paso 1 Si tienes un cordón, un peso pequeño, y un cronómetro o un reloj con segundero, haz lo que indica el Procedure Note (Nota del procedimiento) en tu libro. Repite el experimento con varias longitudes diferentes del cordón. Si no reúnes tus propios datos, completa la investigación usando los datos de muestra dados abajo. Los resultados dados aquí se basan en estos datos de muestra.

Longitud (cm) x	100	85	75	30	15	5	43	60	89	140	180	195
Periodo (s) y	2.0	1.9	1.8	1.4	0.9	0.6	1.4	1.6	2.0	2.4	2.6	2.9

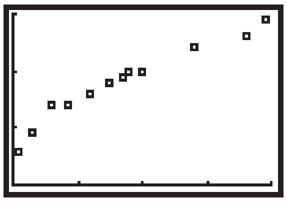
Paso 2 La gráfica se ve como una transformación de la función raíz cuadrada, $y = \sqrt{x}$. El vértice está en el origen, así que la gráfica no ha sido trasladada, y claramente no se ha reflejado sobre el eje x ni sobre el eje y. Así que debe ser simplemente un estiramiento o un encogimiento de $y = \sqrt{x}$.

Paso 3 El origen es (0, 0) porque un péndulo de longitud 0 cm no tendría periodo.



[0, 200, 50, 0, 3, 1]

Paso 4 Escoge el punto (100, 2.0) en el conjunto de datos. Supongamos que ésta es la imagen del punto (100, 10) en la gráfica de la función madre, $y = \sqrt{x}$. (Podríamos haber escogido cualquier punto sobre la curva madre, pero (100, 10) implica un cálculo sencillo.) El punto (100, 10) está a 100 unidades horizontales y a 10 unidades verticales del vértice de $y = \sqrt{x}$, mientras que (100, 2.0) está a 100 unidades horizontales y a 2 unidades verticales del vértice de la gráfica transformada. Por lo tanto, no hay ningún estiramiento ni encogimiento horizontal, pero existe un encogimiento vertical por un factor de $\frac{2}{10}$, ó 0.2. Así pues, la ecuación es $y = 0.2\sqrt{x}$.



[0, 200, 50, 0, 3, 1]

Esta ecuación parece ajustarse a los datos bastante bien, pero tal vez desees comenzar con un punto de datos diferente, para ver si puedes obtener un mejor ajuste.

Paso 5 Los puntos que no están demasiado cerca del vértice, y que parecen seguir la tendencia de la mayoría de los puntos, son los que mejor funcionan. El punto (30, 1.4), por ejemplo, probablemente *no* es una buena opción, porque está cerca del origen y no parece seguir el patrón general del resto de los puntos.

LECCIÓN CONDENSADA

4.7

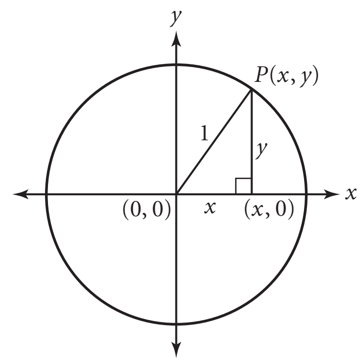
Transformaciones y la familia de los círculos

En esta lección

- Conocerás el **círculo unitario** y su ecuación
- Escribirás ecuaciones para **elipses** al transformar la ecuación del círculo unitario
- Graficarás elipses, que no son funciones, en tu calculadora al introducir ecuaciones para dos funciones

Lee el primer párrafo en la página 217 de tu libro, en el que se revisan las transformaciones que has aprendido en este capítulo.

El **círculo unitario** es un círculo que tiene un radio de 1 unidad y cuyo centro está en el origen. Escoge cualquier punto $P(x, y)$ sobre el círculo y dibuja un triángulo de pendiente.



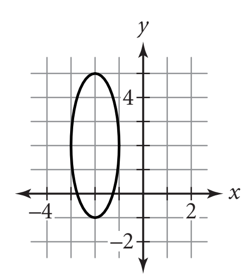
El triángulo de pendiente tiene catetos de longitudes x e y y una hipotenusa de longitud 1. Por el Teorema de Pitágoras, $x^2 + y^2 = 1$. Ésta es la ecuación del círculo unitario.

El dominio del círculo unitario es $-1 \leq x \leq 1$, y el rango es $-1 \leq y \leq 1$. El círculo unitario *no* es una función porque la mayor parte de los valores de entrada corresponden a dos valores de salida. Por ejemplo, el valor x 0.8 corresponde tanto a $y = 0.6$ como a $y = -0.6$.

Para graficar el círculo unitario en tu calculadora, debes resolver $x^2 + y^2 = 1$ para y. Esto produce dos ecuaciones, $y = +\sqrt{1 - x^2}$ y $y = -\sqrt{1 - x^2}$. Estas ecuaciones *sí son* funciones. Necesitas graficar ambas para obtener un círculo completo.

Una *elipse* es un círculo estirado o encogido. El Ejemplo A en tu libro muestra cómo puedes usar lo que has aprendido sobre las transformaciones para encontrar una ecuación de una elipse, basándote en la ecuación de un círculo unitario. Lee ese ejemplo y después lee el ejemplo siguiente.

EJEMPLO ¿Cuál es la ecuación de esta elipse?



▶ ***Solución*** El círculo unitario original se ha estirado verticalmente por un factor de 3, y se ha trasladado −2 unidades horizontalmente y 2 unidades verticalmente. La ecuación cambia así:

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad \text{Círculo unitario original.}$$

$$x^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1 \qquad \text{Estiramiento vertical por un factor de 3. } \left(\text{Reemplaza } y \text{ con } \tfrac{y}{3}\right).$$

$$(x + 2)^2 + \left(\frac{y - 2}{3}\right)^2 = 1 \qquad \text{Traslada el centro a } (-2, 2).$$

(continúa)

Para graficar esta ecuación en tu calculadora, necesitas resolver para y.

$$\left(\frac{y-2}{3}\right)^2 = 1 - (x+2)^2 \qquad \text{Resta } (x+2)^2 \text{ de ambos lados.}$$

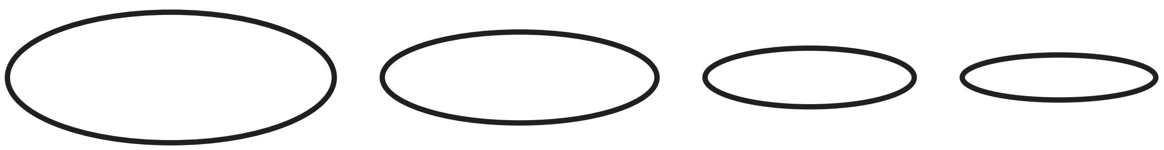
$$\frac{y-2}{3} = \pm\sqrt{1-(x+2)^2} \qquad \text{Toma la raíz cuadrada de ambos lados.}$$

$$y = 2 \pm 3\sqrt{1-(x+2)^2} \qquad \text{Multiplica ambos lados por 3 y después suma 2.}$$

Grafica ambas funciones, $y = 2 + 3\sqrt{1-(x+2)^2}$ y $y = 2 - 3\sqrt{1-(x+2)^2}$, para obtener la elipse completa.

Investigación: ¿Cuándo un círculo no es un círculo?

Escoge una de las elipses siguientes. Usa tu regla cuidadosamente para dibujar los ejes dentro de la elipse. Asegúrate de que sean perpendiculares. Marca tus ejes en centímetros, con 0 en el centro de la elipse.



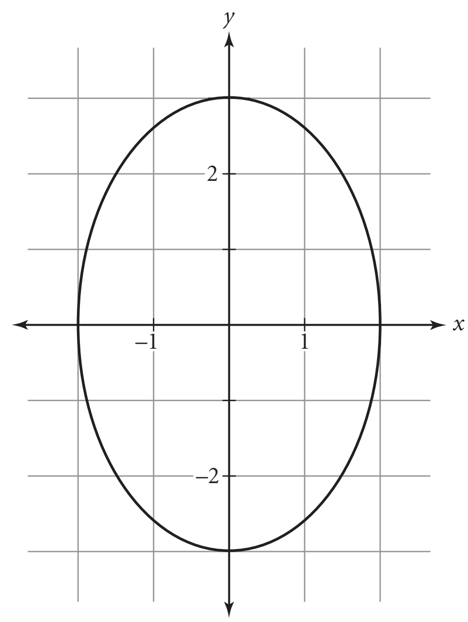
Usa tus marcas para escribir una ecuación para la elipse. El lado derecho de esta elipse está a 2 cm del centro, y la parte de arriba está a 3 cm del centro, así que la ecuación es

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$$

Para verificar tu ecuación, resuelva para y. Para esta elipse,

$$y = \pm 2\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

Grafica ambas ecuaciones en tu calculadora y ve si la elipse tiene las mismas dimensiones que tu elipse original. Asegúrate de usar una ventana amistosa para tu gráfica.



Las ecuaciones para las transformaciones de círculos son más fáciles de trabajar antes de resolver para y. Si comienzas con una función para la mitad superior o inferior del círculo, *puedes* transformarla, pero a menudo resulta enredado trabajar con el resultado. Esto se ilustra en el Ejemplo B en tu libro. Lee ese ejemplo, siguiéndolo con papel y lápiz.

En el recuadro "Transformations of Functions and Relations" (Transformaciones de funciones y relaciones) en tu libro, se resume todo lo que has aprendido sobre las transformaciones. Lee el texto del recuadro atentamente, y consúltalo cuando hagas tu tarea.

LECCIÓN CONDENSADA

4.8 Composiciones de funciones

En esta lección

- **Compondrás** dos funciones y encontrarás la ecuación y la gráfica de la función compuesta
- Explorarás situaciones reales que implican **composiciones de funciones**
- Interpretarás expresiones que implican composiciones de funciones en el contexto de situaciones reales

Lee atentamente la exposición al principio de la Lección 4.8. Allí se presenta una situación en la que la salida de una función es la entrada de otra función. Esta situación ilustra una **composición de funciones.**

Trabaja el Ejemplo A en tu libro. Observa que puedes escribir una sola ecuación para $y = g(f(x))$ de la siguiente manera:

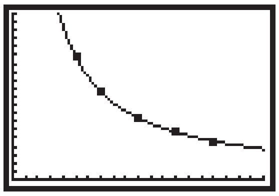
$$g(f(x)) = g\left(\frac{3}{4}x - 3\right) = \left|\frac{3}{4}x - 3\right|$$

Investigación: Mirar hacia arriba

Pasos 1–3 En la investigación en tu libro, lee la lista de materiales, el Procedure Note (Nota del procedimiento), y los Pasos 1–3. Como es difícil recabar los datos por tu cuenta, puedes usar los datos siguientes. Estos pares ordenados están en la forma (d, h), donde d es la distancia desde la punta del pie del observador hasta el centro del espejo, y h es la marca de la altura reflejada en el espejo.

(50, 148), (70, 106), (100, 73.5), (130, 57), (160, 45)

Paso 4 Puedes encontrar una función de la forma $h = f(d) = \frac{a}{d}$ que se ajuste a los datos. Si reescribes esta ecuación como $a = d \cdot f(d)$, puedes ver que a es la distancia multiplicada por la altura. Al calcular este producto para cada uno de los cinco puntos de datos, se obtienen 7400, 7420, 7350, 7410, 7200. Al usar la media, 7400, para a, se obtiene la ecuación $h = f(d) = \frac{7400}{d}$. Como puedes ver, esta ecuación se ajusta muy bien a los datos.

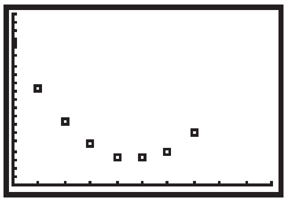


[0, 200, 10, 0, 200, 10]

Paso 5 Ahora imagina que caminas hacia el espejo y que tu posición en intervalos de 1 segundo se expresa por esta tabla:

Tiempo (s) *t*	0	1	2	3	4	5	6	7
Distancia del espejo (cm) *d*	163	112	74	47	33	31	40	62

La gráfica de estos datos (*tiempo, distancia*) tiene la forma de una parábola.



[0, 10, 1, 0, 200, 10]

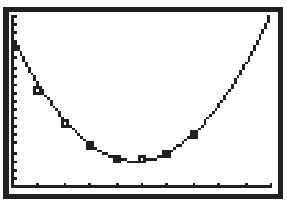
Para encontrar una función que se ajuste a estos datos, primero observa que el vértice parece estar alrededor de (4.75, 30). Así que la función es una traslación de la gráfica madre, $y = x^2$, 4.75 unidades horizontalmente y 30 unidades verticalmente.

(continúa)

A continuación, necesitas determinar los factores de estiramiento o encogimiento. Escoge el punto (7, 62) y supón que es la imagen del punto (1, 1) sobre la gráfica madre. En la gráfica de $y = x^2$, el punto (1, 1) está a 1 unidad del vértice (0, 0), tanto horizontal como verticalmente. El punto está a $7 - 4.75 = 2.25$ unidades horizontalmente del vértice de la gráfica transformada y $62 - 30 = 32$ unidades verticalmente del vértice. Así pues, el factor de escala horizontal es 2.25 y el factor de escala vertical es 32. Usa las traslaciones y los factores de escala para obtener la ecuación final.

$$\frac{d - 30}{32} = \left(\frac{t - 4.75}{2.25}\right)^2 \quad \text{ó} \quad d = g(t) = 32\left(\frac{t - 4.75}{2.25}\right)^2 + 30$$

La función parece ser un buen ajuste.



[0, 10, 1, 0, 200, 10]

Paso 6 Usa las funciones de h y d para responder a las preguntas del Paso 6 en tu libro. Las respuestas se dan a continuación.

a. $h = f(47) = \frac{7400}{47} \approx 157$. Puedes ver hasta una altura de 157 cm en la pared cuando estés a 47 cm del espejo.

b. $d = g(1.3) = 32\left(\frac{1.3 - 4.75}{2.25}\right)^2 + 30 \approx 105$. Estás a 105 cm del centro del espejo a los 1.3 segundos.

c. Puedes usar g para encontrar tu distancia desde el espejo a los 3.4 segundos: $g(3.4) = 32\left(\frac{3.4 - 4.75}{2.25}\right)^2 + 30 = 41.52$. Después usa f para encontrar a qué altura puedes ver la pared cuando estás a 41.25 cm del espejo: $f(41.52) = \frac{7400}{41.52} \approx 178$ cm. Observa que como estás usando la salida de g como entrada de f, esto es equivalente a $f(g(3.4))$.

Paso 7 Completa el Paso 7 en tu libro. Aquí se presentan los resultados:

a. $f(60)$ es la distancia más alta que puedes ver en la pared cuando estás a 60 cm del espejo. $f(60) = \frac{7400}{60} \approx 123$ cm

b. $g(5.1)$ es tu distancia desde el espejo a los 5.1 segundos.

$$g(5.1) = 32\left(\frac{5.1 - 4.75}{2.25}\right)^2 + 30 \approx 31 \text{ cm}$$

c. $f(g(2.8))$ es la distancia más alta que puedes ver en la pared después de 2.8 segundos. $g(2.8) \approx 54$, y $f(54) \approx 137$. Por lo tanto, $f(g(2.8)) \approx 137$ cm.

Paso 8

$$H(t) = f(g(t)) = f\left(32\left(\frac{t - 4.75}{2.25}\right)^2 + 30\right) = \frac{7400}{32\left(\frac{t - 4.75}{2.25}\right)^2 + 30}$$

$$H(2.8) = \frac{7400}{32\left(\frac{2.8 - 4.75}{2.25}\right)^2 + 30} \approx 137 \text{ cm}$$

Lee el texto muy importante que viene después de la investigación. Después trabaja el Ejemplo B, en el que se compone una función consigo misma.